

Real Rate

Simple Solvency – Ein Solvenzmodell für deutsche Lebensversicherer

Holger Bartel

Inhaltsverzeichnis

1) Zusammenfassung	3
2) Das einfache Solvenzmodell.....	4
2.1) Die Risikokapitalanforderung.....	4
2.2) Der Zinsprozess	7
2.3) Der Aktien- und Immobilienprozess	9
2.4) Das Kreditrisiko.....	9
2.5) Die ökonomische Marktwertbilanz.....	11
2.6) Die Bestandsentwicklung	16
3) Die eingebetteten Optionen	18
3.1) Die Put-Call-Parität	18
3.2) Die Option aus den garantierten Rechnungsgrundlagen	20
3.3) Die Versicherungsnehmer-Option	22
4) Der Puffer Put.....	24
4.1) Der handelsrechtliche Rahmen	24
4.2) Die Modellannahmen.....	25
4.3) Die Anpassung an Solvency II	27
5) Embedded Value und Appraisal Value.....	33
6) Ergebnisse eines Beispielversicherers	37
6.1) Inputparameter.....	37
6.2) Marktwertbilanz.....	38
6.3) Vergleich der Optionen bezüglich Zinsniveau	38
6.4) Vergleich der Optionen bezüglich Aktivduration.....	41
6.5) Vergleich der Optionen bezüglich Aktienquote	42
Anhang 1: Kreditrisiko.....	45
Anhang 2: Durationeigenschaften	48
Anhang 3: Innerer Wert und Zeitwert.....	55
Anhang 4: Die Austauschoption	58
Anhang 5: Appraisal Value.....	61
Anhang 6: Leakage Test	64
Literatur.....	65

1) Zusammenfassung

Es wird ein stark vereinfachtes ökonomisches Solvenzmodell für Lebensversicherer vorgeschlagen, welches die wesentlichen Aspekte von Solvency II abbildet. Ziel ist die Vermeidung von Cashflow-Projektionen, Stochastik und Bilanzperioden und somit die Verbesserung der Transparenz der Wirkungsweise. Daher wird auf diese Ansätze der in Deutschland verwendeten Solvency II Standardmodelle, also des Cashflowmodells (GDV 2012, 2013) bzw. des Simulationsmodells (GDV 2014) verzichtet. Es sind nur sehr wenige Input-Parameter erforderlich: der Lebensversicherer wird durch nur rund 20 Parameter charakterisiert, die Kalibrierung des Marktes erfolgt durch nochmal so viele Parameter. Diese wenigen Größen sind auf Grund des asymmetrischen Geschäftsmodells allerdings stark nichtlinear miteinander verknüpft.

Es wird eine geschlossene Formel vorgeschlagen, um den Wert der Garantien und Optionen zu bestimmen. Dieser „Puffer Put“ ist eine Alternative zu der im Cashflowmodell verwendeten Austauschoption und berücksichtigt explizit die in der handelsrechtlichen Bilanz verfügbaren Möglichkeiten zur Abpufferung von Risiken. Bei Verwendung des Puffer Puts ergeben sich optimale Aktivdurationsen, Aktienquoten und Kreditrisikoinvestments, die – im Gegensatz zur Austauschoption – der real beobachtbaren Kapitalanlage entsprechen: Es ist optimal, in Aktien, Immobilien- und festverzinsliche Wertpapiere mit Spread zu investieren und die Durationslücke nicht komplett zu schließen.

Das Papier ist wie folgt strukturiert. In Abschnitt 2 wird das einfache Solvenzmodell vorgestellt, wobei insbesondere auf die Rolle der Optionen in der Marktwertbilanz nach Solvency II eingegangen wird. In Abschnitt 3 stellen wir die in die Marktwertbilanz eingebetteten Optionen dar. In Abschnitt 4 schlagen wir mit dem Puffer Put eine alternative geschlossene Formel für den Wert der Garantien vor. In Abschnitt 5 wird das Modell für Steuerungszwecke um den Embedded Value (Bestandswert) und den Appraisal Value (Bestands- und Neugeschäftswert) erweitert. Abschnitt 6 enthält die Ergebnisse für einen Beispielversicherer.

2) Das einfache Solvenzmodell

Die Elemente des einfachen Solvenzmodells umfassen die gesamte Risikokapitalanforderung, die einzelnen Teilrisiken für Zins, Aktien, Ausfall, Versicherungstechnik und operative Risiken. Diese Risiken wirken sich auf die entsprechenden Bilanzpositionen der ökonomischen Marktwertbilanz im Stress aus. In der Bilanz werden des Weiteren die Optionen berücksichtigt, die sich aus den garantierten Rechnungsgrundlagen und dem Versicherungsnehmerverhalten ergeben. Die Solvenzausstattung bestimmt sich dann aus dem Verhältnis von ökonomischen Eigenmitteln und der Kapitalanforderung.

Für die Steuerung von Lebensversicherern ist es sehr wertvoll, ein einfaches Modell zu haben, das die wesentlichen ökonomischen Zusammenhänge abbildet, dabei aber einfach nutzbar und interpretierbar ist. Das Solvency II-Cashflowmodell gemäß QIS 6 (Quantitative Impact Study 6) oder LTGA (Long Term Guarantee Assessment), siehe GDV (2012a, 2012b, 2013) ist aufwändig zu befüllen und zum Teil schwer zu interpretieren. In diesem Abschnitt wird ein einfaches Solvenzmodell vorgestellt, welches mit wenigen Inputparametern auskommt. Das Modell ist auch als Excel-Sheet zusammen mit dieser Dokumentation auf www.researchgate.net/project/Simple-Solvency verfügbar.

2.1) Die Risikokapitalanforderung

Solvency II basiert auf einer Marktwertbilanz. Die verfügbaren Eigenmittel ASM, Available Solvency Margin, entsprechen den ökonomischen Eigenmitteln der Marktwertbilanz. Die Veränderung der verfügbaren Eigenmittel in Abhängigkeit des Stresses entspricht der ökonomischen Kapitalanforderung SCR, Solvency Capital Requirement.

Die Solvabilitätsquote gemäß Solvency II ist:

$$\text{SII-Quote} = \text{ASM} / \text{SCR}.$$

Die Netto-Kapitalanforderung SCR ergibt sich als ASM-Reduktion auf Grund eines Multi-Stresses, also nach Puffernutzung. Im Gegensatz zur Aggregation der Wirkung mehrerer einzelner Stresse ist beim Multi-Stress sichergestellt, dass handelsrechtliche Puffer nur einmal genutzt werden. Eine Komponente des Multi-Stresses ist die Zinsänderung. Die Risikokapitalanforderung ergibt sich aus dem Maximum über Zinssenkung und Zinsanstieg. Der Index 0 steht für die Größe vor Stress. Größen vor Diversifikationseffekt sind mit einem Querstrich gekennzeichnet. Die Kapitalanforderung kann auch schrittweise mittels der einzelnen später erläuterten sogenannten Adjustments für Diversifikation DIV, Überschussbeteiligung ZÜ(VN), Risikomarge RM und Steuern DT hergeleitet werden. Das Symbol Δ steht für die Änderung einer Größe in der Marktwertbilanz auf Grund des Stresses:

$$\begin{aligned} \text{SCR} &= -\Delta \text{ASM} \\ &= \text{ASM}_0 - \text{ASM} \\ &= \overline{\text{SCR}_{\text{Brutto}}} - \text{DIV} + \Delta \text{ZÜ(VN)} + \Delta \text{RM} + \Delta \text{DT} \end{aligned}$$

mit der Brutto Kapitalanforderung vor Diversifikation:

$$\overline{SCR}_{\text{Brutto}} = \overline{SCR}_{\text{Zins}} + \overline{SCR}_{\text{Kredit}} + \overline{SCR}_{\text{AI}} + \overline{SCR}_{\text{VT}} + \overline{SCR}_{\text{Op}}.$$

Die einzelnen Bruttostresse werden zu einem simultanen Multi-Stress zusammengefasst und wirken nach Diversifikation auf die jeweiligen Bestände des Unternehmens. Diese Brutto-Kapitalanforderung ergibt sich aus der Aggregation der Teilstresse unter der vereinfachten Annahme der Unkorreliertheit, wodurch sich eine im Vergleich zu den Standardmodellen (Cashflow- und Simulationsmodell) geringere Kapitalanforderung ergibt. Die führt zu dem Diversifikationsfaktor:

$$\text{div}^* = \frac{\overline{SCR}_{\text{Brutto}}^* - \overline{SCR}_{\text{Op}}}{\overline{SCR}_{\text{Brutto}} - \overline{SCR}_{\text{Op}}}$$

mit $\overline{SCR}_{\text{Brutto}}^* = \left(\overline{SCR}_{\text{Zins}}^2 + \overline{SCR}_{\text{Kredit}}^2 + \overline{SCR}_{\text{AI}}^2 + \overline{SCR}_{\text{VT}}^2 \right)^{1/2} + \overline{SCR}_{\text{Op}}$. Diese geringere Kapitalanforderung wird proportional mittels Diversifikationsfaktor auf die Risiken zurückverteilt. Die Kapitalanforderung für den Zins ist jedoch nichtlinear in Bezug auf den Zinsstress. Würde man also versuchen, denjenigen Zinsstress zu finden, der der mit dem Diversifikationsfaktor geschrumpften Kapitalanforderung entspricht, so würde es mehrere oder gar keine Lösung geben. Daher wird nicht die Kapitalanforderung, sondern direkt der Zins geschrumpft.

Der absolute Zinsstress wird mit Δr bezeichnet und ist im Fall der Zinssenkung negativ und im Fall des Zinsanstiegs positiv. Er ergibt sich aus dem Zinsstress $\overline{\Delta r}$ vor Diversifikationseffekt durch Multiplikation mit dem Diversifikationsfaktor:

$$\Delta r = \text{div}^* \cdot \overline{\Delta r}.$$

Daraus ergibt sich dann indirekt die Kapitalanforderung für den Zins, welche aufgrund der Nichtlinearität von $\text{div}^* \cdot \overline{SCR}_{\text{Zins}}$ abweicht. Das sich daraus tatsächlich ergebende Gesamtrisiko und der entsprechende Diversifikationseffekt tragen dann nicht mehr den Index *. Durch einen separaten Zinssenkungsstress und einen Zinsanstiegsstress werden die wesentlichen Effekte der nichtlinearen Zinswirkung abgedeckt.

Aufgrund der angenommenen Unkorreliertheit der diversifizierbaren Risiken werden diese mit dem gleichen Diversifikationsfaktor geschrumpft. Nur das operative Risiko diversifiziert sich nicht mit anderen Risiken:

$$\begin{aligned} \overline{SCR}_{\text{Brutto}} &= \text{div} \cdot (\overline{SCR}_{\text{Brutto}} - \overline{SCR}_{\text{Op}}) + \overline{SCR}_{\text{Op}} \\ &= \overline{SCR}_{\text{Brutto}} - \text{DIV} \\ &= \overline{SCR} - \Delta Z\ddot{U}(\text{VN}) - \Delta \text{RM} - \Delta \text{DT} \\ &= \overline{SCR}_{\text{Zins}} + \overline{SCR}_{\text{Kredit}} + \overline{SCR}_{\text{AI}} + \overline{SCR}_{\text{VT}} + \overline{SCR}_{\text{Op}}. \end{aligned}$$

Dabei kann der Diversifikationseffekt, für die diversifizierbaren Risiken, relativ als Faktor $\text{div} = (\text{SCR}_{\text{Brutto}} - \text{SCR}_{\text{Op}}) / (\overline{\text{SCR}}_{\text{Brutto}} - \text{SCR}_{\text{Op}})$ oder als absolute Größe $\text{DIV} = \overline{\text{SCR}}_{\text{Brutto}} - \text{SCR}_{\text{Brutto}}$ ausgedrückt werden.

Die Kapitalanforderung für das Zinsrisiko ist die Summe der Kapitalanforderungen für das ALM-Risiko aufgrund des Durations-Gaps und des Risiko aufgrund der zinsabhängigen Versicherungsnehmeroption VNO wie sie in Abschnitt 3.3 definiert ist. Diese Kapitalanforderungen entsprechen der Reduktion der zukünftigen Überschüsse auf Grund des Zinsstresses. Die Kapitalanforderungen werden mittels Faktoransatz bestimmt. Für das Aktien- und Immobilienrisiko und den Faktor airisk siehe Abschnitt 2.3, für das Kreditrisiko und den Faktor creditrisk siehe Abschnitt 2.4. Der Faktor oprisk für das operative Risiko wird pauschal auf die HGB-Deckungsrückstellung bezogen. Der Faktor vtrisk für das versicherungstechnische Risiko wird auf den Barwert aller künftigen Deckungsrückstellungen bezogen und kann damit direkt als Reduktion der versicherungstechnischen Marge m_{VT} interpretiert werden, siehe Abschnitt 2.5.

Die Kapitalanforderungen vor Diversifikation für die Risiken Zins, Kredit, Aktien und Immobilien (AI), Versicherungstechnik (VT) und operative Risiken (Op) betragen:

$$\overline{\text{SCR}}_{\text{Zins}} = (\overline{\text{SCR}}_{\text{ALM}} + \overline{\text{SCR}}_{\text{VNO}})^+$$

mit

$$\begin{aligned} \overline{\text{SCR}}_{\text{ALM}} &= (\text{Garantie}(r_0 + \bar{\Delta}r) - \text{Garantie}_0) - (\text{FI}(r_0 + \bar{\Delta}r) - \text{FI}_0) \\ &= \text{Garantie}_0 \cdot \left(\frac{D_{\text{VT}}(r_0 + \bar{\Delta}r)}{D_{\text{VT}}(r_0)} - 1 \right) - \text{FI}_0 \cdot \left(\frac{D_{\text{FI}}(r_0 + \bar{\Delta}r)}{D_{\text{FI}}(r_0)} - 1 \right) \\ &= \bar{\Delta}r \cdot (-\text{Garantie}_0 \cdot D_{\text{VT}}(r_0 + \bar{\Delta}r) + \text{FI}_0 \cdot D_{\text{FI}}(r_0 + \bar{\Delta}r)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\text{SCR}}_{\text{VNO}} &= \Delta \text{VNO} \\ &= \text{HGBDR} \cdot \left(s(r_0 + \bar{\Delta}r) \cdot \left(1 - \frac{D_{\text{VT}}(r_0 + \bar{\Delta}r)}{D_{\text{VT}}(\text{mrz} - \text{m}_{\text{VT}})} - \text{vtrisk} \cdot D_{\text{VT}}(r_0) \right) \right. \\ &\quad \left. - s(r_0) \cdot \left(1 - \frac{D_{\text{VT}}(r_0)}{D_{\text{VT}}(\text{mrz} - \text{m}_{\text{VT}})} \right) \right) \end{aligned}$$

mit der Stornoquote $s(r) = (s_{\min} + (s_{\max} - s_{\min}) \cdot N(r; \mu_{\text{VNO}} + \text{mrz}; \sigma_{\text{VNO}}^2))$,

$$\overline{\text{SCR}}_{\text{Kredit}} = \text{creditrisk}_0 \cdot \text{FI}_0,$$

$$\overline{\text{SCR}}_{\text{AI}} = (\text{airisk} \cdot \text{Aktien}_0)^+,$$

$$\overline{\text{SCR}}_{\text{VT}} = \text{vtrisk} \cdot \text{HGBDR} \cdot D_{\text{VT},0},$$

$$\overline{\text{SCR}}_{\text{Op}} = \text{oprisk} \cdot \text{HGBDR}.$$

Dabei verwenden wir die Kurzbezeichnung $(x)^+ = \max(x; 0)$. $D_{VT}(r_0)$ ist die modifizierte Duration der Garantie unter Ansatz von Storno und Kapitalabfindung bei Rentenversicherungen und $D_{FI}(r_0)$ ist die modifizierte Duration des Marktwerts der festverzinslichen Wertpapiere FI, beide gemessen zum Zins r_0 vor Stress. Die entsprechenden Werte zum jeweiligen Marktzins r werden ohne Angabe des Zinsniveaus notiert.

Die Kapitalanforderung für Zins nach Diversifikation wird ganz analog berechnet, jedoch mit dem Zinsstress nach Diversifikation. Die weiteren diversifizierbaren Risiken werden direkt mit dem Diversifikationsfaktor geschrumpft:

$$SCR_{Zins} = (SCR_{ALM} + SCR_{VNO})^+,$$

$$SCR_{Kredit} = div^* \cdot \overline{SCR_{Kredit}},$$

$$SCR_{AI} = div^* \cdot \overline{SCR_{AI}},$$

$$SCR_{VT} = div^* \cdot \overline{SCR_{VT}},$$

$$SCR_{Op} = \overline{SCR_{Op}}.$$

Im Folgenden werden nur diese Größen nach Diversifikation benötigt. Mit der Sensitivität gibt es ein einfaches Maß dafür, wie stark der diversifizierte Stress nach allen Adjustments auf den Unternehmenswert durchschlägt:

$$\text{Sensitivität} = SCR / SCR_{Brutto}.$$

Nachfolgend werden der Zinsprozess, der Aktien- und Immobilienprozess und das Kreditrisiko genauer dargestellt. Gemäß Solvency II-Rahmenrichtlinie (2009) werden die Risiken betrachtet, die binnen Jahresfrist eintreten können.

2.2) Der Zinsprozess

Der absolute Zinsstress beträgt, wie im vorangehenden Abschnitt erläutert $\Delta r = div^* \cdot \overline{\Delta r}$.

Die brutto Zinsänderung vor Diversifikationseffekt beträgt:

$$\overline{\Delta r} = q(r) - r_0.$$

Der Marktzins nach (netto-)Stress beträgt:

$$r = r_0 + \Delta r.$$

Der Zins folgt dem Modell von Vasicek (1977). Dieser Prozess ist eigentlich ein Modell für den kurzfristigen Zins (Short Rate). Wir modellieren damit jedoch den für die Versicherer relevanten langfristigen Zins (Spot Rate), nämlich den 10-jährigen risikolosen Zins von deutschen Staatsanleihen. Die Zinsen in diesem Modell können negativ werden, was aufgrund des aktuell sehr niedrigen

Zinsniveaus nicht als Modellschwäche sondern als Stärke angesehen wird. Im Simulationsmodell wird das Modell von Hull and White (1990) verwendet. Es ist eine Verallgemeinerung des Vasicek-Modells, mit zeitabhängigem Niveau des langfristigen Mittelwertes und lässt ebenfalls negative Zinsen zu. In alternativen Modellen sind die Zinsen stets positiv. So ist der Zins im Modell von Cox, Ingersoll und Ross (1985) nicht-zentral chi-quadrat-verteilt und die Zinsvolatilität geht gegen null, wenn der Zins gegen null geht. Dies würde dazu führen, dass es bei sehr niedrigem Zinsniveau kein Risikokapital für das Zinsrisiko zu stellen wäre.

Im Vasicek-Modell beträgt die Zinsänderung: $dr_t = mr \cdot (ufr - r_t) \cdot dt + \sigma_{\text{Vasicek}} \cdot dW_t$. Dabei ist $mr > 0$ der Mean Reversion Parameter, $ufr > 0$ ist das langfristige Zinsniveau zu dem der Zins tendiert, $\sigma_{\text{Vasicek}} > 0$ ist die Volatilität und W_t ein Standard Wiener Prozess. Der Zins ist normalverteilt: $r_t \sim N\left(r_0 \cdot e^{-mr \cdot t} + ufr \cdot (1 - e^{-mr \cdot t}); \sigma_{\text{Vasicek}}^2 / (2 \cdot mr) \cdot (1 - e^{-2 \cdot mr \cdot t})\right)$. Die einjährige Volatilität des Vasicek-Modells wird so gewählt, dass sie der am Markt beobachteten Volatilität des Zinsniveaus entspricht: $\sigma_{\text{Vasicek}}^2 / (2 \cdot mr) \cdot (1 - e^{-2 \cdot mr}) = \sigma_{\text{Zins}}^2$, also $\sigma_{\text{Vasicek}} = (2 \cdot mr / (1 - e^{-2 \cdot mr}))^{1/2} \cdot \sigma_{\text{Zins}} \approx \sigma_{\text{Zins}}$.

Die Quantile des Zinses nach einem Jahr, ausgehend von $t = 0$, betragen:

$$q(r_{t=1}) = r_{t=0} \cdot e^{-mr} + ufr \cdot (1 - e^{-mr}) \pm 2,58 \cdot \sigma_{\text{Zins}}.$$

Der Zins darf zwar negativ werden, muss, jedoch nicht beliebig stark. Wie in Anhang 2 erläutert muss gelten:

$$r > \max(e^{-k_{VT}}; e^{-k_{FI}}) - 1 = r_{\min},$$

ansonsten ist in unserem Modell bei der getroffenen Annahme zum geometrischen Bestandsabbau die Duration nicht definiert.

Die Schätzung des Mean Reversion Parameters mr und der Volatilität σ_{Zins} aus historischen Daten erfolgt über die Diskretisierung des Modells: $r_{t+1} - r_t = mr \cdot ufr - mr \cdot r_t + \varepsilon_t$ bzw. $r_{t+1} = mr \cdot ufr + (1 - mr) \cdot r_t + \varepsilon_t$. Dabei ist $\varepsilon_t \sim N(0; \sigma_{\text{Vasicek}}^2)$. Der Zins hängt von seinem eigenen Wert in der vorangegangenen Periode ab. Dies entspricht einem autoregressiven Modell erster Ordnung. In einem solchen sogenannten AR(1) Modell entspricht der Regressionskoeffizient $(1 - mr)$ der Korrelation ρ zwischen r_{t+1} und r_t , also $1 - mr = \rho$. Die Mean Reversion ergibt sich also aus der Autokorrelation durch $mr = 1 - \rho$. Van den End (2011) hat mit dieser Methode jährliche Daten langfristiger, i. d. R. 10-jähriger, Zinsen über bis zu 200 Jahre aus den Niederlanden, Deutschland, USA und Japan untersucht. Die Ergebnisse kann man grob wie folgt zusammenfassen: Die Mean Reversion mr liegt je nach Land zwischen 1,5% und 9,1%, mit 95%-Konfidenzintervallen zwischen 0% und 16%, die Zinsvolatilität σ_{Zins} liegt je nach Land zwischen 1,6% und 2,2% und die langfristigen Mittelwerte des Zinses liegen je nach Land zwischen 4,3% und 5,5%.

Der Wert einer Perpetuität, also einer unendlichen Annuität, wird in Kapitel 5 für die Bestimmung des Neugeschäftswerts benötigt. Er beträgt im Falle einer flachen Zinsstruktur und deterministischer Zinsen ganz einfach $1/r$, bei einer Annuitätenhöhe von 1. Bei niedrigen Zinsen würde man jedoch einen Barwert von unendlich erhalten, was zu einen völlig überhöhten Neugeschäftswert führen würde.

Daher ist der Fall stochastischer Zinsen mit Mean Reversion zu betrachten. In diesem Fall gibt es jedoch keine geschlossene Formel. Die Lösung hängt von r , ufr , mr und σ_{Vasicek} ab und kann nur numerisch gelöst werden. So gibt Delbaen (1993) für das CIR-Modell eine Formel in Form einer Hypergeometrischen Funktion an, welche unendliche Summen enthält. Geman und Yor (1993) geben ein Integral für den Wert einer Perpetuität im CIR-Modell an. Sie erwähnen ferner, dass man im Fall des Vasicek-Modells aufgrund der Normalverteilungseigenschaft einfache Bewertungen für Perpetuitäten bekommen würden, geben diese aber nicht an. Goovaerts und Dhaene (1999) geben eine vorsichtige Verteilung für Perpetuitäten im CIR-Modell an, die den gleichen Erwartungswert wie die echte Verteilung hat. Norberg (2004) gibt die bedingte Verteilungsfunktion $p(r, v)$ einer kontinuierlichen Perpetuität im Vasicek-Modell in Form einer partiellen Differentialgleichung an, die nur numerisch gelöst werden kann.

Da in unserem einfachen Modell nur geschlossene Formeln verwendet werden sollen, verwenden wir für den Wert einer Perpetuität vereinfachend $\text{perp} = 1/ufr$. Wir nehmen also kontante Zinsen mit flacher Zinsstruktur an und verwenden die ufr , um robuste Ergebnisse zu erhalten.

Abgesehen von den Zinsquantilen im Stress rechnen wir also zur Vereinfachung nicht mit einer Zinsstrukturkurve, die sich z. B. aus dem Vasicek Modell ergeben würde, sondern nur mit einer flachen und konstanten Zinsstrukturkurve. Nicht explizit vorgesehen sind durch Mean Reversion künftig steigende Zinsen (Extrapolation der Zinsstrukturkurve), ein Matching Adjustment oder ein Volatility Balancer. Diese können pauschal im konstanten Zins r berücksichtigt werden, der ein zentraler Inputparameter des Modells ist.

2.3) Der Aktien- und Immobilienprozess

Der Faktor airisk ist der der Anlagestruktur entsprechende Stressfaktor bezogen auf den Marktwert der Aktien und Immobilien, außerhalb der Fondsgebundenen Anlage. Der Aktienkurs, hier mit Startwert 1, folgt einer geometrischen Brownschen Bewegung und ist abhängig vom Zeithorizont t : $S_t = e^{m_{\text{Aktie}} \cdot t + \sigma_{\text{Aktie}} \cdot W_t}$, $t \geq 0$ mit dem Wiener Prozess W_t und hat das 0,5%-Quantil:

$$q(S) = e^{m_{\text{Aktie}} t - 2,58 \cdot \sigma_{\text{Aktie}} \sqrt{t}}.$$

Der Faktor $-2,58$ ist das 0,5%-Quantil der Standardnormalverteilung. Der Stressfaktor beträgt:

$$\text{airisk} = 1 - q(S).$$

2.4) Das Kreditrisiko

Das Kreditrisiko ist der Kreditrisikofaktor creditrisk multipliziert mit dem Marktwert der ausfallbedrohten Wertpapiere. Der Kreditrisikofaktor wird wie bei den Banken im Rahmen von Basel III berechnet, siehe Anhang 1:

$$\text{creditrisk} = \text{defaultrisk} \cdot mf$$

mit dem Quantil für das pure Ausfallrisiko:

$$\text{defaultrisk} = \text{LGD} \cdot N\left(\frac{N^{-1}(\text{pd}) + \sqrt{\rho_{\text{Kredit}}} \cdot 2,58}{\sqrt{1 - \rho_{\text{Kredit}}}}\right),$$

$$\rho_{\text{Kredit}} = 0,12 \cdot \frac{1 - e^{-50 \cdot \text{pd}}}{1 - e^{-50}} + 0,24 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-50 \cdot \text{pd}}}{1 - e^{-50}}\right)$$

und dem laufzeitabhängigen Maturity Faktor mf für das Spreadrisiko:

$$\text{mf} = \frac{1 + (\text{rlz} - 2,5) \cdot b}{1 - 1,5 \cdot b},$$

$$b = (0,08451 - 0,05898 \cdot \ln(\text{pd}))^2.$$

Dabei bestimmt der Maturity Faktor das von der Aktivduration getriebene Spreadänderungsrisiko. Bei $\text{rlz} = 1$ ist $\text{mf} = 1$ und $\text{spread} = 0$. Dabei ist rlz die Restlaufzeit des Bestands:

$$\text{rlz} = \frac{1}{1 - e^{-\kappa_{VT}}},$$

siehe Anhang 2. Die Probability of Default, pd , ist die mittlere Ausfallwahrscheinlichkeit des FI-Portfolios. defaultrisk ist die Kapitalanforderung für das Kreditrisiko, ρ_{Kredit} ist die Korrelation der Assets der Emittenten und der Parameter LGD ist der Loss Given Default.

Schließlich erhält man das Spreadrisiko als den Teil des gesamten Kreditrisikos, der nicht auf den erwarteten Ausfall zurückzuführen ist:

$$\text{spreadrisk} = \text{creditrisk} - \text{defaultrisk}.$$

Dieser Spread – nicht jedoch der auf das Ausfallrisiko entfallende Anteil der Überrendite – kann vom Versicherungsunternehmen tatsächlich verdient werden, wenn das festverzinsliche Wertpapier bis zum Ablauf gehalten wird. Er beträgt:

$$\text{spread} = \text{LGD} \cdot \text{pd} \cdot (\text{mf} - 1).$$

Der spread wird zum einen für den Kapitalanlagetrend im Rahmen des Puffer Puts in Abschnitt 4.3 verwendet. Zum anderen wird dieser Ansatz zur Kreditrisikomodellierung nicht nur für die Modellierung der festverzinslichen Wertpapiere, sondern auch zur Bestimmung der Ausfallwahrscheinlichkeit des gesamten Versicherungsunternehmens und der damit verbundenen Kapitalkosten in Abschnitt 5 verwendet.

Die Varianz der Rendite des kreditrisikobehafteten Investments wird gemäß Vasicek (2002), siehe Anhang 1, approximiert durch:

$$\sigma_{\text{Kredit}}^2 = \text{mf}^2 \cdot \rho_{\text{Kredit}} \cdot \left(n(N^{-1}(\text{pd}))\right)^2.$$

2.5) Die ökonomische Marktwertbilanz

Die Assets umfassen die Aktien, Festverzinslichen Wertpapiere FI, die FLV sowie den angelegten Betrag des Eigenkapitals EK. Die absoluten Werte der Aktien bleiben im Zinsstress unverändert. Auch die FLV werden vereinfachend als nicht zinssensitiv behandelt, da ihre Wertänderung kaum einen ökonomischen Nettoeffekt hat, abgesehen von der Änderung der Kickbacks. FLV umfasst vereinfachend auch die Sonstigen Passiva, da diese ebenfalls zu keiner Kapitalanforderung führen, wobei vereinfachend angenommen wird, dass die Sonstigen Aktiva wertmäßig ungefähr den Sonstigen Passiva entsprechen. Damit lauten alternative Darstellungen der Bilanzgleichung:

$$\text{Assets} = \text{Aktien} + \text{FI} + \text{FLV} + \text{EK}$$

$$= \text{EK} + \text{RfBEM} + \text{ZÜ} + \text{VNO} + \text{Garantie} + \text{FLV}$$

$$= \text{ASM} + \text{Liabilities.}$$

Die Marktwert-Bilanz (MW) und die HGB-Bilanz sehen wie folgt aus:

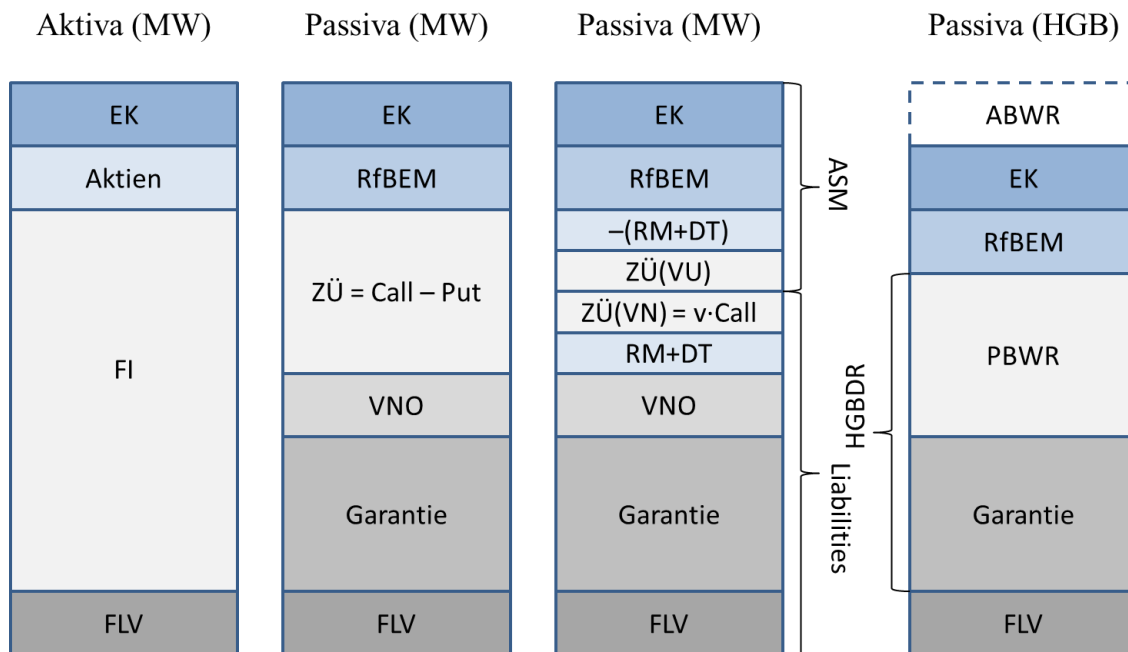


Abbildung 1: Marktwert- und HGB-Bilanz

Im Rahmen des Standardmodells von Solvency II sind die Größen Assets, EK, Garantie, FLV, die Versicherungsnehmeroption VNO und RfBEM bekannt oder bestimmbar. Damit erhält man die zukünftigen Überschüsse:

$$\text{ZÜ} = \text{Assets} - \text{EK} - \text{Garantie} - \text{FLV} - \text{VNO} - \text{RfBEM.}$$

Die ZÜ lassen sich alternativ aus der HGB-Bilanz ableiten. Die HGB-Bilanzsumme HGBBS setzt sich zusammen aus:

$$\text{HGBBS} = \text{EK} + \text{RfBEM} + \text{HGBDR} + \text{FLV}$$

$$= \text{Assets} - \text{ABWR}$$

und die HGB-Deckungsrückstellung für die konventionellen Produkte entspricht der Summe aus Garantie und passivischen Bewertungsreserven:

$$\text{HGBDR} = \text{Garantie} + \text{PBWR}.$$

Damit erhält man

$$\text{ZÜ} = \text{ABWR} + \text{PBWR} - \text{VNO}.$$

Die Risiken wirken im Stress auf die Marktwertbilanz. Das $\text{SCR}_{\text{Brutto}}$ reduziert grundsätzlich die zukünftigen Überschüsse: Die Kapitalanforderungen für Kredit, Aktien und Immobilien und das operative Risiko belasten im Stress auf der Aktivseite die jeweiligen Kapitalanlagen und reduzieren auf der Passivseite die Kapitalüberschüsse. Die Kapitalanforderung für die Versicherungstechnik erhöht auf der Passivseite die Garantie und reduziert die versicherungstechnischen Überschüsse. Die Kapitalanforderung für den Zins erhöht im Fall der Zinssenkung auf der Aktivseite auf die FI und auf der Passivseite die Garantien im Allgemeinen noch stärker. Zusätzlich wird der Wert der Versicherungsnehmeroption erhöht, wodurch die Kapitalüberschüsse sinken. Dies wird explizit über den Zinsstress Δr berücksichtigt.

Nachfolgend sind diese Auswirkungen auf die Bilanzgrößen dargestellt. Die in der Tabelle aufgeführten Reduktionen der Kapitalüberschüsse ergeben sich automatisch, da die Kapitalüberschüsse als Residuum aus gesamten zukünftigen Überschüssen und den gegebenen versicherungstechnischen Überschüssen bestimmt werden. Die Darstellung der VNO passt nicht ganz in das nachfolgende Schema, da sie nicht zusätzlich um eine SCR-Komponente verändert werden. Sie ist hier dennoch aufgeführt, da sie von den Stressen abhängt und weil geringere VNO die ZÜ und somit die ZÜ(KA) erhöhen. Unter der Annahme, dass das Zinssenkungsrisiko dominiert, reduzieren sich sowohl die Stornoquote als auch die passivischen Bewertungsreserven und somit auch die VNO. Das versicherungstechnische Risiko reduziert ebenso die passivischen Bewertungsreserven und somit die VNO:

Kapitalanforderung	Aktiva	Passiva
SCR_{Op}	FI ↓, Aktien ↓	ZÜ(KA) ↓
SCR_{Zins}	FI ↑	ZÜ(KA) ↓, Garantie ↑, VNO ↓
$\text{SCR}_{\text{Kredit}}$	FI ↓	ZÜ(KA) ↓
SCR_{AI}	Aktien ↓	ZÜ(KA) ↓
SCR_{VT}	–	ZÜ(VT) ↓, Garantie ↑, VNO ↓

Tabelle 1: Wirkung der Kapitalanforderungen auf die Marktwertbilanz

ZÜ(VT) ist der Barwert des versicherungstechnischen Ergebnisses, bestehend aus Risikoergebnis und Übrigem Ergebnis, letzteres ohne Steuerergebnis. Er wird angesetzt als eine versicherungstechnische Marge m_{VT} auf die Deckungsrückstellung und seine Reduktion ist im Stress durch einen erhöhten Garantiewert ist zu berücksichtigen. Die versicherungstechnische Marge kann objektiv als handelsrechtlicher Risiko- und Kostenüberschuss der vergangenen Jahre in Bezug auf die Deckungsrückstellung bestimmt werden:

$$\text{ZÜ}(\text{VT}) = m_{\text{VT}} \cdot \text{HGBDR} \cdot D_{\text{VT}} - \text{SCR}_{\text{VT}}.$$

Mit Hilfe des angenommenen geometrischen Bestandsabbaus können FI und Garantie zu Zinsen $r > \max(e^{-\kappa_{\text{VT}}}; e^{-\kappa_{\text{FI}}}) - 1$ bestimmt werden, siehe Anhang 2. Der Zins kann also leicht negativ werden und die Duration ist dennoch wohl definiert.

Der Wert der garantierten Leistungen kann unter der Nebenbedingung $r > e^{-\kappa_{\text{VT}}} - 1 \approx -\kappa_{\text{VT}}$ mittels Marktzins und mittlerem Bestandsrechnungszins unter Abzug der versicherungstechnischen Marge aus der handelsrechtlichen Deckungsrückstellung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \text{Garantie} &= \text{Garantie}_0 \cdot \frac{D_{\text{VT}}}{D_{\text{VT}}(r_0)} + \text{SCR}_{\text{VT}} \\ &= \text{HGBDR} \cdot \frac{1 - e^{-\kappa_{\text{VT}}} + \text{mrz} - m_{\text{VT}}}{1 - e^{-\kappa_{\text{VT}}} + r} + \text{SCR}_{\text{VT}}. \end{aligned}$$

Hierbei steht HGBDR für die handelsrechtliche Deckungsrückstellung, also inklusive Zinszusatzreserve. Und mrz ist der aktuelle mittlere Bestandsrechnungszins, der sich ergibt, wenn man die handelsrechtlichen Rechnungszinsen, also die Referenzzinsen nach der Zinszusatzreserve, mit der Deckungsrückstellung gewichtet. Die Garantie ist der mit dem Marktzins berechnete Barwert der garantierten Cashflows, mit Best Estimate Sterblichkeit und Kosten, aber ohne Storno, welches separat durch die Versicherungsnehmeroption VNO modelliert wird, siehe Abschnitt 3.3. Wir schreiben kurz Garantie_0 für $\text{Garantie}(r_0)$ und haben oben im zweiten Schritt die Ersetzung $r_0 = r_{\text{HGB}} = \text{mrz} - m_{\text{VT}}$ vorgenommen. Zur Bestimmung der Garantie sind noch die versicherungstechnischen Überschüsse abzuziehen.

Eine analoge Umrechnung gilt für die festverzinslichen Wertpapiere unter der Nebenbedingung $r > e^{-\kappa_{\text{FI}}} - 1 \approx -\kappa_{\text{FI}}$. Das nicht diversifizierbare operative Risiko geht auf der Aktivseite proportional zu Lasten der Festverzinslichen und der Aktien:

$$\begin{aligned} \text{FI} &= \text{FI}_0 \cdot \frac{D_{\text{FI}}}{D_{\text{FI}}(r_0)} - \text{SCR}_{\text{Kredit}} - (1 - a_0) \cdot \text{SCR}_{\text{Op}} \\ &= \text{FI}_0 \cdot \frac{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}}} + r_0}{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}}} + r} - \text{SCR}_{\text{Kredit}} - (1 - a_0) \cdot \text{SCR}_{\text{Op}}. \end{aligned}$$

Die Aktienanlage außerhalb des Investments für Fondsgebundene Lebensversicherungen wird über die Aktienquote a definiert. Die Aktienquote steht hier allgemein für den Anteil der Risikokapitalanlagen, also für Aktien, Immobilien, Beteiligungen und ähnliche Anlagen. Deren Reduktion im Stress ist zu berücksichtigen:

$$\text{Aktien} = \text{Aktien}_0 - \text{SCR}_{\text{AI}} - a_0 \cdot \text{SCR}_{\text{Op}}$$

mit

$$a = \frac{\text{Aktien}}{\text{Aktien} + \text{FI}}$$

Die Höhe der Fondsgebundenen Investments und der Sonstigen Passiva ergibt sich aus der FLV-Quote flv an den Kapitalanlagen. Da die FLV in diesem Modell vereinfachend kein Risiko darstellen, wird deren Höhe auch nicht durch Stress verändert:

$$\text{flv} = \frac{\text{FLV}}{\text{Assets}_0}$$

Das Eigenkapital ändert sich nur durch Kapitalmaßnahmen INJ (Capital Injection), wie zum Beispiel Kapitaleinschüsse zur Erreichung der Solvabilitätsanforderung:

$$\text{EK} = \text{EK}_0 + \text{INJ}.$$

Die Risikomarge RM ist in diesem Modell der fiktive Marktwert sämtlicher nicht gehedgter Risiken. Sie wird bestimmt als Kapitalkostensatz coc angewendet auf den Barwert aller künftigen Kapitalanforderungen SCR. Letzterer wird bestimmt als Faktor auf das aktuelle SCR. Dieser Faktor wird auch Abwicklungsbarwertfaktor genannt und entspricht der Passivduration:

$$\begin{aligned} \text{RM} &= \text{coc} \cdot D_{\text{VT}} \cdot \text{SCR} \\ &= \text{coc} \cdot D_{\text{VT}} \cdot \text{Sensitivität} \cdot \text{SCR}_{\text{Brutto}}. \end{aligned}$$

Der Kapitalkostensatz coc wird als Marktparameter vorgegeben und entspricht der Differenz aus dem risikobehafteten Zins eines potentiellen Erwerbers und dem risikolosen Marktzins. Das CRO-Forum (2008) hat eine Kapitalkostenmarge von 2,5% bis 4,5% hergeleitet, während bei Solvency II üblicherweise ein Wert von 6% verwendet wird. Die DAV AG Market Consistent Embedded Value (2011, Anhang 2) hat einen Ansatz zur Bestimmung der des Kapitalkostensatzes in Abhängigkeit der Risikoaversion des Marktes unter Annahme einer Nutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversion dargestellt. Die Schätzung der Risikoaversion ist aber mit enormen Unsicherheiten behaftet.

Die Risikomarge ist unabhängig davon, ob Neugeschäft gezeichnet wird oder nicht, denn sie umfasst nur die aktuellen Risiken, die aus dem Bestand resultieren. Die Risikomarge wird voll vom Unternehmen getragen, da es sich nicht um tatsächliche Cashflows, sondern um einen risikobedingten Bewertungsabschlag handelt. Sie erhöht den Marktwert der Verbindlichkeiten in der Höhe der unter Solvency II erforderlichen Kapitalkosten.

Die Risikomarge hängt vom SCR, also von der Veränderung der ASM im Stress ab. Die ASM wiederum hängen von der Risikomarge ab. Dieser Zirkelbezug wird im Excel Modell automatisch iterativ gelöst. Die Sensitivität ist beim Puffer Put in der Regel deutlich geringer. Dies hat einen großen Einfluss auf ASM und SCR sowie auf das optimale Spread-Investment, da dieses ein starker Risikotreiber ist.

Bei Solvency II und auch beim Market Consistent Embedded Value, siehe DAV AG Market Consistent Embedded Value (2011), werden anstatt der nicht gehedgten nur die nicht *hedgbaren* Risiken über die Risikomarge bewertet, da alle anderen Risiken komplett gehedgt werden können und

der Wert ihres Hedges als Marktpreis des Hedgeportfolios verfügbar ist. Zu den nicht hedgebaren Risiken gehören z. B. versicherungstechnische Risiken und operationale Risiken, sowie ggf. sehr langfristige Zinsgarantien. Für Zwecke der Unternehmenssteuerung wollen wir bewusst alle nicht gehedgten Risiken bewerten. Sollte ein komplettes Hedgen aller hedgebaren Risiken optimal sein, so ergibt sich als Spezialfall die marktkonsistente minimale Risikomarge. Unser Modell übt somit Druck aus, hedgebare Risiken auch tatsächlich zu hedgen, also zum Beispiel die Durationslücke zu schließen.

Der oben verwendete Abwicklungsbarwertfaktor entspricht unter der hier getroffenen Annahme eines geometrischen Bestandsabbaus, siehe Abschnitt 2.7, der Passivduration, siehe Anhang 2. Er ist die Summe der Barwerte des über die Jahre noch vorhandenen Bestandes bezogen auf den heutigen Bestand. Dabei erfolgt der Abbau des Bestands gemäß den planmäßigen Abläufen sowie erwarteter Sterblichkeit. Mit diesem Faktor lassen sich Barwertberechnungen, wie hier bei der Risikomarge, einfach darstellen.

Die passivischen latenten Steuern DT sind in diesem Ansatz komplett vom Unternehmen zu tragen. Sie berechnen sich aus dem als Parameter vorgegebenen Steuersatz τ angewendet auf die künftigen Aktionärsgewinne. Ein negativer Wert entspricht aktivischen latenten Steuern und wird wegen steuerlicher Beschränkung des Verlustvortrags nur mit dem halben Steuersatz bestimmt. Da im Stress weniger Steuern gezahlt werden, führt dies zu einer Entlastung. Neben der direkten Wirkung hat die Halbierung der Steuerentlastung bei negativen Aktionärsgewinnen auch eine starke indirekte Wirkung über den Anstieg der Risikomarge, da die risikomindernde Wirkung deutlich reduziert wird:

$$DT = \begin{cases} \tau \cdot Z\ddot{U}(VU) & \text{wenn } Z\ddot{U}(VU) \geq 0 \\ \frac{\tau}{2} \cdot Z\ddot{U}(VU) & \text{wenn } Z\ddot{U}(VU) < 0 \end{cases}$$

Es wird angenommen, dass Eigenkapital, das zusätzlich eingezahlt oder entnommen wird, keinen Steuereffekt hat. Die Risikomarge RM und die passivischen latenten Steuern DT, deferred taxes, sind im Rahmen des Übergangs von der handelsrechtlichen Bilanz zur Marktwertbilanz zwischen dem VN und dem VU zu verschieben.

Die Verbindlichkeiten umfassen:

$$\text{Liabilities} = \text{Garantie} + \text{FLV} + \text{VNO} + (\text{RM} + \text{DT}) + Z\ddot{U}(\text{VN}).$$

Die verfügbaren ökonomischen Eigenmittel ASM betragen

$$\text{ASM} = \text{EK} + \text{RfBEM} + Z\ddot{U}(\text{VU}) - (\text{RM} + \text{DT})$$

mit

$$\text{RfBEM} = \text{fr. RfB} + \text{SÜAF}.$$

Die bereits entstandenen RfB-Eigenmittel, RfBEM, umfassen die HBG-Bilanzpositionen freie Rückstellung für Beitragsrückerstattung, fr.RfB, und den Schlussüberschussanteilsfonds, SÜAF. Anders als bei Solvency II, wo der Barwert der RfB-Entnahmen verwendet wird, wird hier also die

komplette nicht gebundene RfB als Eigenmittel angesetzt. Obwohl die RfB-Eigenmittel grundsätzlich Verbindlichkeiten sind, werden sie hier vereinfachend den Eigenmitteln ASM zugerechnet. Grund: Die freie RfB kann per Antrag bei der Aufsichtsbehörde über den Notstandsparagraphen §56b VAG zur Abwendung eines sonst drohenden Notstands aufgelöst werden. Der Schlussüberschussanteilsfonds kann per Deklaration entfallen. Da sie den ASM zugerechnet werden, dürfen sie im Stress nicht zusätzlich reduziert und als Puffermittel eingesetzt werden. Durch diesen Ansatz sind ASM und SCR höher als wenn man sie nicht zu den Eigenmitteln zählen würde und dafür SCR-mindernd ansetzen würde. Die absolute Überdeckung, also ASM–SCR, wird dadurch nicht beeinflusst.

In Solvency II ist die Going Concern Reserve ein weiterer Bestandteil der Eigenmittel. Sie umfasst z. B. die Vorfinanzierung überrechnungsmäßiger Abschlusskostenverluste des Neugeschäfts. In unserem Modell gibt es keine separate Going Concern Reserve in der Marktwertbilanz. Stattdessen wird sie über den versicherungstechnischen Puffer Put, siehe Abschnitt 3.3, abgebildet: Verzichtet man auf Neugeschäft, so wird der zu Beginn verfügbare Puffer erhöht, im Laufe der Zeit fehlen jedoch die entsprechenden Erträge. Der positive Effekt auf die Eigenmittel kann im Modell also erreicht werden, indem das Neugeschäft (Parameter NG) abgeschaltet wird. Dies reduziert den Wert des Puts. Die Option zur Einstellung des Neugeschäfts steht stets zu Verfügung.

2.6) Die Bestandsentwicklung

Wir nehmen vereinfachend einen geometrischen Bestandsabbau mit der konstanten Rate $\kappa_{VT} > 0$ über die Zeit an. Unter der Nebenbedingung $r > e^{-\kappa_{VT}} - 1$, siehe Anhang 2, beträgt die Duration:

$$D_{VT} = D_{VT}(r) = \frac{1}{1 - e^{-\kappa_{VT}} + r} > 0$$

mit der Bestandsabbaurate, die sich aus Duration und Zins zum gleichen Stichtag, ergibt:

$$\kappa_{VT} = -\ln\left(1 - \frac{1}{D_{VT}(r_0)} + r_0\right) > 0.$$

Entsprechend gilt für die Aktivduration unter der Nebenbedingung $r > e^{-\kappa_{FI}} - 1$:

$$D_{FI} = D_{FI}(r) = \frac{1}{1 - e^{-\kappa_{FI}} + r} > 0,$$

$$\kappa_{FI} = -\ln\left(1 - \frac{1}{D_{FI}(r_0)} + r_0\right) > 0.$$

Damit die Bestandsabbaurate positiv und definiert ist, muss folgende Beziehung zwischen den Stichtagsgrößen gelten:

$$\frac{1}{1 + r_0} < D_{FI}(r_0), D_{VT}(r_0) < \frac{1}{r_0}.$$

Der geometrische Bestandsabbau ist leider nicht sehr realistisch und trifft die Marktwerte nach Zinsänderung nicht sehr gut. Genauere und trotzdem einfache Approximationen wären hilfreich.

3) Die eingebetteten Optionen

Nachfolgend werden die im Lebensversicherungsgeschäft eingebetteten Optionen separiert, um zu zeigen, welche Rolle der Wert der Garantien in der Marktwertbilanz spielt. Hierfür verwenden wir bewusst eine etwas andere Darstellung, als bei Solvency II. Ziel ist es, den Unterschied zwischen dem im Geschäftsmodell enthaltenen Call und dem Put herauszuarbeiten.

3.1) Die Put-Call-Parität

Ausgangspunkt für die als Put darstellbare Garantie der Rechnungsgrundlagen Zins, Biometrie und Kosten ist die Put-Call-Parität, welche allgemein den Zusammenhang zwischen einer Call-Option und einer Put-Option bei gleichem Ausübungspreis, gleicher Laufzeit und gleichem Underlying zeigt:

$\text{Underlying} + \text{Put} = \text{Barwert des Ausübungspreises} + \text{Call}.$

Im Kontext der Lebensversicherung erfolgt die Beteiligung an folgendem Underlying:

$$\begin{aligned}\text{Underlying} &= \text{Assets} - \text{EK} - \text{RfBEM} - \text{VNO} - \text{FLV} \\ &= \text{Aktien} + \text{FI} - \text{RfBEM} - \text{VNO},\end{aligned}$$

$\text{Barwert des Ausübungspreises} = \text{Garantie}.$

Also lautet der Zusammenhang:

$$(\text{Assets} - \text{EK} - \text{RfBEM} - \text{VNO} - \text{FLV}) + \text{Put} = \text{Garantie} + \text{Call}.$$

Hierbei bezeichnen die Assets den Marktwert sämtlicher Aktiva und die Garantie ist der Marktwert der gegenüber den Kunden ausgesprochenen Garantien. Die Größe EK umfasst das eingezahlte Eigenkapital, die Kapitalrücklage, die Gewinnrücklage und die nachrangigen Verbindlichkeiten.

Mit der üblichen Bilanzgleichung eines Lebensversicherers

$$\text{Assets} = \text{EK} + \text{RfBEM} + \text{ZÜ} + \text{VNO} + \text{Garantie} + \text{FLV}$$

erhält man hieraus den Wert der zukünftigen Überschussbeteiligung, der ein Saldo ist und nach den erwarteten positiven und negativen Überschüssen aufgespalten werden kann:

$$\text{ZÜ} = \text{Call} - \text{Put}.$$

Die Assets stehen auf der Aktivseite (linker Teil der Bilanzgleichung). Die Passivseite (rechter Teil der Bilanzgleichung) setzt sich zusammen aus dem Eigenkapital, den RfB-Eigenmitteln, dem Barwert der garantierten Leistungen, den fondsgebundenen Rückstellungen und den zukünftigen Überschüssen. Letztere lassen sich also gemäß Put-Call-Parität in einen long Call (+Call) und einen short Put (-Put) zerlegen. Call und Put sind auf Grund ihres optionalen Charakters stets positiv.

Die Zerlegung der ZÜ nach den Optionen leitet sich auch aus folgender allgemeiner Überlegung her. Im Fall ohne temporäre Pufferungsmöglichkeit, o^{TP} , kann man die Cashflows direkt in positive und negative Zahlungen zerlegen. Durch die temporäre Pufferung, wie sie in Abschnitt 3 mit dem Puffer Put dargestellt wird, reduzieren sich die Zahlungen des Versicherers barwertig um den Betrag TP. Entsprechend reduzieren sich auch die Zahlungen an den Versicherungsnehmer barwertig um TP:

$$\begin{aligned} Z\ddot{U} &= \text{Call}^{o^{TP}} - \text{Put}^{o^{TP}} \\ &= (\text{Call}^{o^{TP}} - TP) - (\text{Put}^{o^{TP}} - TP) \\ &= \text{Call} - \text{Put} \end{aligned}$$

mit $\text{Call} = \text{Call}^{o^{TP}} - TP$ und $\text{Put} = \text{Put}^{o^{TP}} - TP$, also $TP = \text{Put}^{o^{TP}} - \text{Put}$.

Weitere Zerlegungen der ZÜ sind die nach der Zuordnung auf die Versicherungsnehmer, $Z\ddot{U}(VN)$, und das Versicherungsunternehmen, $Z\ddot{U}(VU)$, und nach den Entstehungsquellen Versicherungstechnik, $Z\ddot{U}(VT)$, bzw. Kapitalanlage, $Z\ddot{U}(KA)$:

$$Z\ddot{U} = Z\ddot{U}(VN) + Z\ddot{U}(VU),$$

$$Z\ddot{U} = Z\ddot{U}(VT) + Z\ddot{U}(KA).$$

Den Zusammenhang zwischen den ZÜ-Zerlegungen erhält man aus der für deutsche Lebensversicherer geltenden Mindestzuführungsverordnung MindZV (2014). Diese sieht eine Mindestüberschussbeteiligung der Versicherungsnehmer am *positiven* jährlichen handelsrechtlichen Risiko- und Übrigen Ergebnis vor, sowie eine Beteiligung am Kapitalertrag KAertrag, nicht am Kapitalüberschuss:

$$Z\ddot{U}(KA) = \text{KAertrag} - \text{RZ}.$$

mit dem barwertigen handelsrechtlichen Rechnungszinsaufwand

$$\text{RZ} = \text{HGBDR} \cdot \text{mrz} \cdot D_{VT}.$$

Die tatsächliche Beteiligung des Kunden erfolgt hier vereinfachend in Höhe des Beteiligungssatzes v in Bezug auf die Überschüsse. Dabei ist v mindestens so hoch anzusetzen, dass die Mindestzuführung eingehalten wird.

Die Gesamtverzinsung gvz ist dann der jährliche Rechnungs- bzw. Garantiezins zuzüglich der Beteiligung an laufenden- und Schlussüberschüssen bezogen auf die Deckungsrückstellung:

$$gvz = \frac{\text{RZ} + Z\ddot{U}(VN)}{\text{HGBDR} \cdot D_{VT}} = \text{mrz} + v \cdot \frac{\text{Call}}{\text{HGBDR} \cdot D_{VT}} = \text{mrz} + v \cdot \left(m_{VT} - \text{mrz} + \frac{\text{KAertrag} + \text{Put}}{\text{HGBDR} \cdot D_{VT}} \right).$$

Hier sieht man, dass die Stellhebel v und m_{VT} die Gesamtverzinsung erhöhen, wobei zu beachten ist, dass der Put mit m_{VT} sinkt und den positiven Effekt zum Teil kompensiert. Unter der Annahme,

dass der Wettbewerb nur über die Beteiligungsquote v stattfindet, ergibt sich approximativ die folgende individuelle Veränderung der Gesamtverzinsung:

$$\Delta_{\text{gvz}} \approx \Delta v \cdot \frac{\text{Call}}{\text{HGBDR} \cdot D_{\text{VT}}}.$$

Der Zusammenhang wird noch marginal durch die iterative Bestimmung der Risikomarge überlagert. Beim Puffer Put kommt noch die iterative Bestimmung der ZÜ(VN) hinzu, so dass die Wirkung auf die Gesamtverzinsung etwas stärker ist.

Nicht nur für Solvency II ist eine Bewertung der Optionen erforderlich. Eine ganz analoge Anforderung wird bei der Bewertung von Versicherungsverträgen nach dem künftigen International Financial Reporting Standard IFRS 4 Phase II diskutiert, siehe IFRS (2013) Exposure Draft Insurance Contracts. Folgende Darstellung, die sich aus der Put-Call-Parität ableitet, dient dem IASB, um für die einzelnen Komponenten zu entscheiden, ob Wertänderungen über die Gewinn- und Verlustrechnung gebucht werden sollen: $\text{Garantie} + \text{ZÜ(VN)} = v \cdot \text{Underlying} + (1 - v) \cdot \text{Garantie} + v \cdot \text{Put}$.

3.2) Die Option aus den garantierten Rechnungsgrundlagen

Die Mindestbeteiligung ist in der Mindestzuführungsverordnung über feste Prozentsätze der jeweiligen Gewinnquellen festgelegt. Die tatsächlich gewährten Quoten liegen i. d. R. über den Mindestquoten. Wir vereinfachen die Quoten zu einer einzigen Quote v , bezogen auf den Rohüberschuss (= Call), also den Barwert aller (positiven) handelsrechtlichen künftigen Überschüsse vor Steuern. Dieser Wert wird als Parameter vorgegeben und er wird im Stressfall auf den Mindestzuführungssatz reduziert:

$$v = \text{ZÜ(VN)} / \text{Call}.$$

Die negativen Überschüsse, also Verluste, sind allein vom Versicherungsunternehmen zu tragen und werden, wie im nächsten Abschnitt gezeigt, mittels eines Puts bewertet. Die positiven Überschüsse, welche sich als ein Call darstellen lassen, werden wie folgt zwischen VU und VN aufgeteilt:

$$\text{ZÜ(VN)} = v \cdot \text{Call},$$

$$\text{ZÜ(VU)} = (1 - v) \cdot \text{Call} - \text{Put}.$$

In der Abbildung 2 sind der long Call und der short Put dargestellt, unter Berücksichtigung der temporären Puffernutzung. Diese beträgt $\text{TP} \leq x \cdot (\text{Aktien} + \text{FI})$, wobei x die handelsrechtlichen Puffer repräsentiert. Dies kann so interpretiert werden, dass die Puffernutzung die Strikes entsprechend verschiebt, sowohl für den Put als auch für den Call. Dadurch sind die Optionen bei gegebener Verteilung der ZÜ seltener im Geld. Eine genauere Darstellung erfolgt im Rahmen der Behandlung des Puffer Puts.

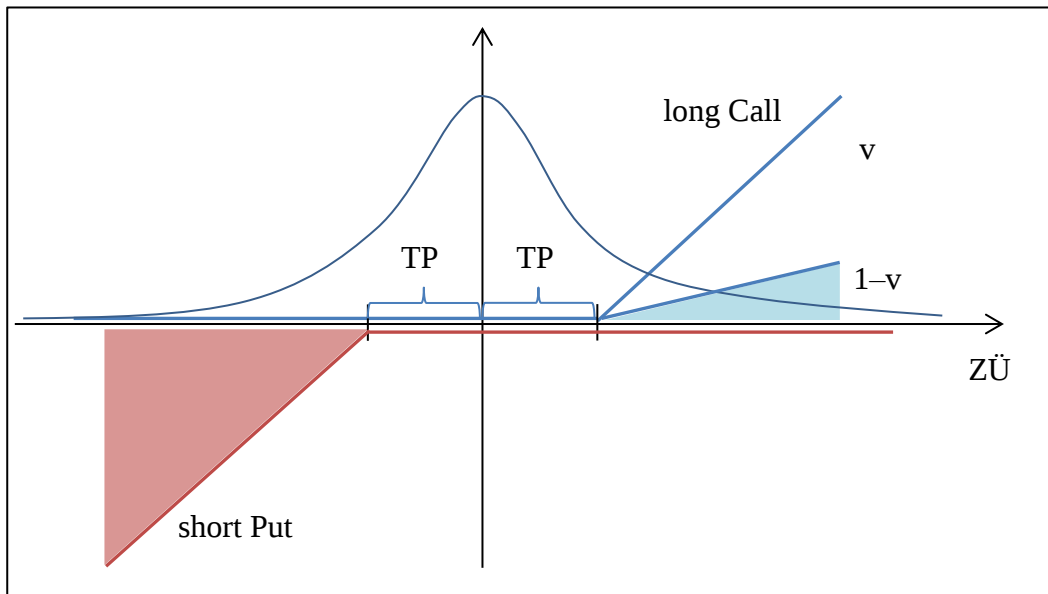


Abbildung 2: Optionen und Puffernutzung

Wir differenzieren die Optionen im Falle des Puffer Puts weiter nach den Gewinnquellen Kapitalerträge und Versicherungstechnik:

$$\text{Call} = \text{Call}(\text{KA}) + \text{Call}(\text{VT}),$$

$$\text{Put} = \text{Put}(\text{KA}) + \text{Put}(\text{VT}).$$

Die ZÜ(VU) entsprechen den Cashflows an den Aktionär. Gemäß Mindestzuführungsverordnung muss der Versicherer sämtliche Verluste alleine tragen und erhält dafür an den positiven Überschüssen einen kleinen Anteil. Den Rest der positiven Ergebnisse erhält der Versicherungsnehmer in Form seiner Überschussbeteiligung, zusätzlich zu den ihm gegebenen Garantien. In der Regel wird die aufsichtsrechtliche Mindestzuführung u. a. auf Grund des Wettbewerbsdrucks übererfüllt, so dass vor Stress eine höhere Beteiligungsquote gilt. Im Stress kann die Beteiligung des Kunden bis auf das Minimum reduziert werden. Hierdurch wird im Stress die risikomindernde Wirkung der Überschussbeteiligung berücksichtigt.

In der Praxis resultiert die ASM-Reduktion im Stress primär daher, dass sich die ZÜ(VU) reduzieren, da der Wert des Puts stark steigt. Dieser Effekt kann nur zum Teil durch eine Reduktion der Deklaration und den mildernden Effekt der latenten Steuern kompensiert werden. Zudem steigt der Put nicht in dem Umfang, in dem sich die gesamten zukünftigen Überschüsse reduzieren. Dies wäre höchstens der Fall, wenn sich der Put sehr weit im Geld befindet.

Ergänzend sollen weitere Optionseigenschaften dargestellt werden, die allgemein sowohl für den Puffer Put als auch für die Austauschoption gelten. Siehe auch Anhang 3. Aus der Put-Call-Parität leitet sich auch ab, dass der Zeitwert des Puts dem Zeitwert des Calls entspricht, weshalb wir ihn kurz mit TV für Time Value bezeichnen:

$$\text{TV}(\text{Call}) = \text{TV}(\text{Put}) = \text{TV}.$$

Der Teil der zukünftigen Überschüsse, der an die VN bzw. VU geht, kann in den inneren Wert, IV, und Zeitwert zerlegt werden. Der Zeitwert der ZÜ-Option umfasst den Anteil v des Zeitwerts der Put-Option. Dies entspricht der Bestimmung der Garantien und Optionen in einem internen stochastischen Modell: die G&O sind die Differenz zwischen dem zukünftigen Überschussanteil, zum einen berechnet auf dem deterministischen Mittleren Pfad, auf welchem sich die inneren Werte realisieren, und zum anderen im Mittel über alle simulierten Pfade:

$$ZÜ(VU) = IV(VU) - G\&O,$$

$$ZÜ(VN) = IV(VN) + G\&O$$

mit

$$G\&O = v \cdot TV.$$

In Abschnitt 4 wird der Puffer Put als Möglichkeit zur Bestimmung des Werts des Puts dargestellt. Eine Alternative hierzu ist die Verwendung der Austauschoption, wie in QIS und im LTGA. Sie ist in Anhang 4 dargestellt.

3.3) Die Versicherungsnehmer-Option

Zusätzlich zu der dargestellten Finanzoption, die sich aus der zum Ablauf ausgesprochenen Zahlungsverpflichtung ergibt, ist die Option zu bewerten, die sich aus dem Versicherungsnehmerverhalten ergibt. Diese VNO ist der Wert der Versicherungsnehmer-Optionen auf Rückkauf, sowie Kapitalabfindung bei Rentenversicherungen. Sie reduziert die zukünftigen Überschüsse und geht zu Lasten der Gewinnquelle Kapital. Damit wird die Last dieser Option gemeinsam vom Versichertenkollektiv und vom Unternehmen getragen. Die Option gewinnt mit steigenden Zinsen an Wert und deren Ausübung durch den nur zum Teil finanzrationalen Kunden wird wahrscheinlicher, da die Wiederanlage des Geldes für ihn attraktiver wird. Dieser Vorteil des Kunden ist ein Optionswert, welcher zu Lasten des Unternehmens geht. Die DAV AG Optionsbewertung (2007) hat diese Option mit Hilfe des sogenannten Zinsabschlagsverfahrens bewertet und später für das LTGA neu kalibriert.

Die Basis für den Wert der Versicherungsnehmeroption ist die Verschlechterung der zukünftigen Überschüsse auf Grund eines Vollstornos. Auf der Aktivseite ist die handelsrechtliche Rückstellung auszuführen, während auf der Passivseite die Garantien entfallen: HGBDR – Garantie = PBWR. Diese passivischen Bewertungsreserven messen, um wie viel der garantierte Rückkaufswert über dem Marktwert der Garantie liegt. Bei Storno tritt dieser Verlust sofort ein. Dieser Wert ist nun mit der Stornoquote zu gewichten. Der Stornofaktor s ist hier nicht die jährliche Stornoquote, sondern umfasst die Restlaufzeit des Bestands. Er berücksichtigt zudem pauschal die niedrige Finanzrationalität der Kunden, sowie die Einbußen durch Stornoabschlag, entfallender Schlussbeteiligung oder ggf. erneuter Gesundheitsprüfung. Die Stornoquote ist kapitalmarktabhängig. Sie steigt, je höher der Marktzins über dem mittleren Bestandsrechnungszins liegt, denn in diesem Fall kann der Rückkaufswert am Markt günstiger angelegt werden. Stornoabschläge werden nicht explizit angesetzt) Ein solches dynamisches Stornoverhalten wird üblicherweise in Market Consistent Embedded Value Modellen verwendet, siehe Society of Actuaries (2012). Vereinfachend wird die Option als so-

fort fällig betrachtet, so dass der Zeitwert ignoriert wird. Zudem kann bei niedrigen Zinsen eine Entlastung eintreten, da die passivischen Bewertungsreserven negativ sind:

$$VNO = s \cdot PBWR,$$

$$s = s_{\min} + (s_{\max} - s_{\min}) \cdot N(r; \mu_{VNO} + mrz; \sigma_{VNO}^2).$$

Dabei ist $N(\mu; \sigma^2)$ ist die Normalverteilung, die einem schrittweisen Übergang zwischen der minimalen und der maximalen Stornoquote dient, σ_{VNO} ist der Glättungsparameter und μ_{VNO} ist die Schwelle, ab der die Stornorate stark steigt.

Die Abschnitt 2.1 verwendete Formel für die Kapitalanforderung aufgrund der Versicherungsnehmeroption leitet sich wie folgt her:

$$\begin{aligned} \overline{SCR}_{VNO} &= \Delta VNO \\ &= \Delta(s \cdot PBWR) \\ &= \Delta(s \cdot (HGBDR - \text{Garantie})) \\ &= \Delta\left(s \cdot \left(HGBDR - HGBDR \cdot \frac{1 - e^{-\kappa_{VT}} + mrz - m_{VT}}{1 - e^{-\kappa_{VT}} + r}\right)\right) \\ &= HGBDR \cdot \Delta\left(s \cdot \left(1 - \frac{D_{VT}(r)}{D_{VT}(mrz - m_{VT})}\right)\right) \\ &= HGBDR \cdot \left(s(r_0 + \overline{\Delta r}) \cdot \left(1 - \frac{D_{VT}(r_0 + \overline{\Delta r})}{D_{VT}(mrz - m_{VT})} - \frac{\overline{SCR}_{VT}}{HGBDR}\right) \right. \\ &\quad \left. - s(r_0) \cdot \left(1 - \frac{D_{VT}(r_0)}{D_{VT}(mrz - m_{VT})}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \overline{SCR}_{VT} = v_{\text{risk}} \cdot HGBDR \cdot D_{VT}(r_0).$$

4) Der Puffer Put

Die in QIS und im LTGA übliche Austauschoption berücksichtigt nicht explizit die handelsrechtlich verfügbaren Pufferungsmöglichkeiten, über die der Lebensversicherer verfügt, um seine Zahlungen zu minimieren. Solvency II basiert zwar auf einer Marktwertsicht, allerdings gelten die nationalen handelsrechtlichen Vorschriften fort, so dass handelsrechtliche Puffer auch unter Solvency II zu Entlastungen führen. Dies wird im Rahmen des nachfolgend vorgeschlagenen Puffer Puts berücksichtigt.

4.1) Der handelsrechtliche Rahmen

Wir modellieren explizit die unter HGB gegebene Möglichkeit, aktivischen Bewertungsreserven zu heben, bevor es zu Zahlungen des Aktionärs kommt. Darüber hinaus können noch Stille Aktivlasten aufgebaut werden, die die Pufferungsmöglichkeiten des Unternehmens noch weiter erhöhen. Für Lebensversicherer aus anderen Ländern ergeben sich analoge Effekte aus der nationalen statutorischen Bilanzierung. Ein früher Ansatz dieser Idee ist im Ergebnisbericht der GDV-Arbeitsgruppe „Zukünftiger Rechnungszins“ (2002) zu finden, wo die Risiken zwar auf Basis von Marktwerten bestimmt werden, aber nur die Bewertungsreserven der Aktivseite als Eigenmittel angesetzt werden und nicht die Bewertungsreserven der Passivseite. Ein weiterer Vorteil des Puffer Puts ist die bessere Abbildung des Wiederanlagerisikos, welches in den Solvency II-Standardansätzen QIS und LTGA nur unzureichend abgebildet ist.

Der Ansatz der aktivischen Pufferungsmöglichkeiten ergänzt konsequent die in QIS bereits abgebildete passivische Pufferungsmöglichkeit: Über die Nutzung der freien RfB und des Schlussüberschussanteilsfonds SÜAF kann das Durchschlagen von z. B. Kapitalmarktschwankungen auf die Aktionärssphäre vermieden werden. Der Schlussüberschussanteilsfonds kann per Deklaration reduziert werden, beim SÜAF im Altbestand ggf. nur beschränkt. gemäß §56b können deutsche Lebensversicherer durch Nutzung der HGB-Position der freien RfB VAG extreme Schwankungen abpuffern. Hierfür ist die Zustimmung der Aufsichtsbehörde erforderlich, um einen drohenden Notstand abzuwenden, unvorhersehbare Verluste auszugleichen oder Reservestärkungen durchzuführen.

Es gibt noch weitere Pufferungsmöglichkeiten, die sich aus dem deutschen Versicherungsaufsichtsrecht ergeben. Diese sind jedoch sämtlich nicht im Cashflowmodell und auch nicht in unserem Modell abgebildet: Gemäß §5 MindZV kann die Mindestzuführung mit Zustimmung der Aufsichtsbehörde durch Verrechnung der Gewinnquellen reduziert werden, sofern das Versicherungsunternehmen auf seinen Anteil verzichtet. §89 VAG sieht im Falle der nicht dauernden Erfüllbarkeit der Garantien die Möglichkeit der Anordnung zur Leistungsherabsetzung durch die Aufsicht vor. Gemäß §163 VVG sind Prämien- und Leistungsänderung bei nicht vorhersehbarer Änderung der Rechnungsgrundlagen nach Treuhänderbestätigung möglich. §169 VVG ermöglicht eine befristete Kürzung der Rückkaufswerte bei Gefährdung der Garantien.

Diese nicht explizit modellierten risikomindernden Effekte können jedoch implizit berücksichtigt, indem der Puffer Put so kalibriert wird, dass das Niveau der G&O aus dem Simulationsmodell erreicht wird. Im Simulationsmodell sind die Regelungen gemäß §5 MindZV und §56b explizit abgebildet.

Der sogenannte Limited Liability Put, LLP, ermöglicht es Kapitalgesellschaften aufgrund ihrer beschränkten Haftung, keine weiteren Kapitaleinschüsse vorzunehmen, wenn diese sich nicht rentieren. Auf Grund des Going Concern Ansatzes wird sie jedoch üblicherweise nicht im Rahmen von Solvency II angesetzt. Wir setzen ihn ausschließlich im Falle des Verzichts auf Neugeschäft an. Die reduzierende Wirkung des LLP auf den gesamten Put wird für diesen Fall in Abschnitt 4.3 dargestellt.

4.2) Die Modellannahmen

Die vorgeschlagene Option ist ein vom Versicherungsunternehmen an den Versicherungsnehmer verkaufter Put, finanzmathematisch ein Short Put. Der Wert des Puts entspricht dem Erwartungswert der vom Versicherungsunternehmen zu zahlenden Beträge, um die Garantie auch in schlechten Pfaden zu erfüllen. Da die handelsrechtlichen bilanziellen Möglichkeiten zur Abpufferung von schlechten Ergebnissen explizit berücksichtigt werden kann auch vom „Puffer Put“, PP, gesprochen werden.

Mit den gegebenen ZÜ und der im vorangehenden Abschnitt hergeleiteten Zerlegung der ZÜ in die Optionen Call und Put kann man nun den Call ersetzen durch $\text{Call} = \text{ZÜ} + \text{Put}$ und für die Aufteilung der ZÜ auf VN und VU wird nur noch der Wert des Puts benötigt: $\text{ZÜ}(\text{VN}) = v \cdot (\text{ZÜ} + \text{Put})$, $\text{ZÜ}(\text{VU}) = (1 - v) \cdot (\text{ZÜ} + \text{Put}) - \text{Put}$.

Bei dem Put, und entsprechend bei dem Call, handelt es sich nicht um eine klassische Black-Scholes Option, siehe Black and Scholes (1973). Um die Möglichkeit der Pufferung abzubilden, verwenden wir einen Ansatz aus der Ruintheorie. Die Ruintheorie untersucht neben der Ausfallwahrscheinlichkeit eines Versicherungsunternehmens z. B. auch den erwarteten Wert der Nachschusszahlungen durch den Aktionär. Dabei wird explizit der anfängliche dem Unternehmen zur Verfügung stehende Puffer berücksichtigt, denn dieser reduziert das Volumen der Nachschusszahlungen deutlich. Nachschusszahlungen treten nur dann auf, wenn der Puffer sonst negativ werden würde und sie sind genauso hoch, dass der Puffer danach null ist. Der Pufferprozess wird also nie negativ.

Im Falle des Puffer Puts differenzieren wir explizit zwischen den Gewinnquellen. Der Ausdruck $(\cdot)$ zeigt an, dass als jeweiliges Argument die entsprechende Gewinnquelle, also KA oder VT einzusetzen ist. Die zukünftigen Aktionärgewinne aus einer Gewinnquelle sind:

$$\text{ZÜ}(\text{VU}, \cdot) = (1 - v) \cdot \text{Call}(\cdot) - \text{Put}(\cdot)$$

mit

$$\text{Call}(\cdot) = \text{ZÜ}(\cdot) + \text{Put}(\cdot),$$

$$\text{Put}(\cdot) = \text{IV}(\text{Put}, \cdot) + \text{TV}(\cdot).$$

Als Risikomodell verwenden wir den Brownschen Diffusionsprozess X_t . Dabei ist X_t der Wert des Aktiv-Puffers, also die noch nutzbaren aktivischen Bewertungsreserven, bezogen auf den Marktwert der (Aktien + FI) zum Zeitpunkt t und x ist der relative Startwert des Puffers, m ist die Drift der Rendite, σ deren Volatilität und W_t ein Standard Wiener Prozess, der den Zufallseinfluss im

Laufe der Zeit darstellt: $X_t = x + m \cdot t + \sigma \cdot W_t$. Die Risiken folgen also annahmegemäß einer Brownschen Bewegung mit Drift. Tatsächlich unterliegt aber das zentrale Zinsrisiko einem Mean Reversion Prozess, siehe das Vasicek-Zinsmodell in Abschnitt 2.2. Der Wert des Puffer Puts wird dadurch überschätzt. Die Drift m wird überlagert durch die Volatilität σ der Gewinnquellen Zins sowie Risiko und Kosten. Bei negativen Werten X_t wurde der Puffer im Zeitverlauf verbraucht und es werden Zahlungen durch den Versicherer erforderlich, um die Garantie zu gewährleisten. X_t^Y ist der nichtnegative sogenannte reflektierte Prozess. Y_t ist der monoton ansteigende Prozess der kumulierten Kapitalnachzahlungen, auch Capital Injections genannt: $X_t^Y = X_t + Y_t$ mit $Y_t = \min(0, X_0, \dots, X_t)$.

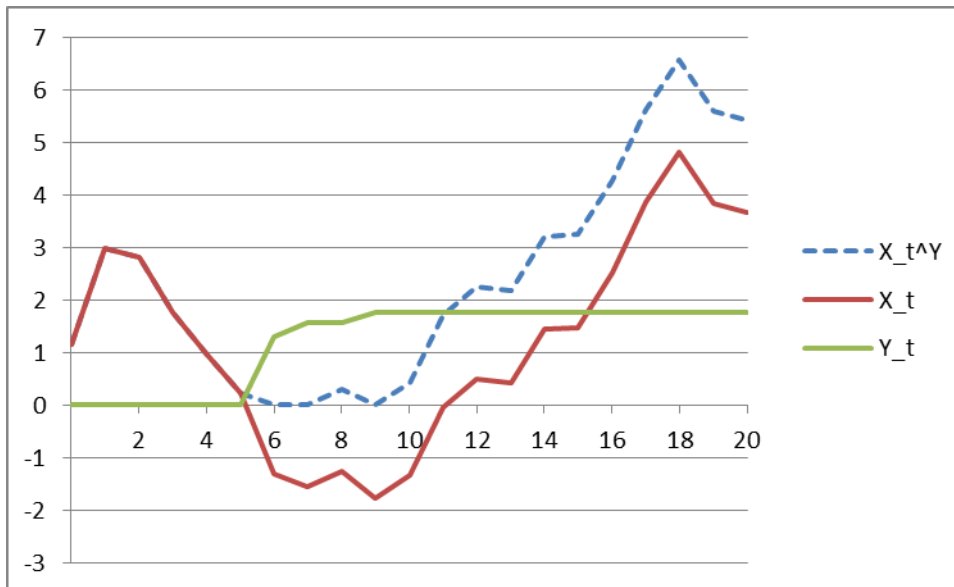


Abbildung 3: Beispiel für eine reflektierte Brownsche Bewegung X_t^Y

Die Grundgröße $\overline{PP}$ des Puffer Puts ist definiert als der Erwartungsbarwert aller Kapitalnachzahlungen: $\overline{PP}(\cdot) = E\left(\int_0^\infty Y_t \cdot e^{-\delta \cdot t} dt\right) \geq 0$. Der Parameter δ kann als eine Art Zins interpretiert werden. Wir betrachten hier nur den praxisrelevanten Fall $\delta > 0$ und $x \geq 0$. Weitere Fälle sind in Anhang 3 dargestellt. Die geschlossene Formel lautet:

$$\overline{PP}(\cdot) = (\text{Aktien} + FI) \cdot \frac{1}{p} \cdot e^{-p \cdot x}$$

mit

$$p(\cdot) = \frac{m + \sqrt{m^2 + 2 \cdot \delta \cdot \sigma^2}}{\sigma^2} > 0.$$

Diese Formel stammt, abgesehen von dem Skalierungsfaktor (Aktien + FI), von Shreve et al. (1984) und entstammt dem Gebiet der Ruintheorie. Diese modelliert den Unternehmenswert eines Schadenversicherers als stochastischen Prozess über die Zeit in Abhängigkeit der gegebenen Kapitalausstattung, der Prämienzahlungen und der Schadeneintritte. Untersucht werden zum Beispiel Größen wie die Ruinwahrscheinlichkeit oder der Verlust aus Kundensicht bei Ruin. Letzterer wird in der Ruintheorie Expected Policyholders Deficit genannt. Wir bezeichnen ihn hier in unserem

Kontext als Puffer Put. Für eine Anwendung in Zusammenhang mit Rückversicherung siehe Eisenberg und Schmidli (2009). Durch die Betrachtung über die Zeit ist es möglich, die handelsrechtlichen Bilanzperioden des deutschen Geschäftsmodells abzubilden, wonach in jeder einzelnen Jahresperiode dem Kunden die Mindestzuführung zu gewähren ist. Ignoriert man die Periodenabbildung, so reduziert sich der Puffer Put zum Expected Policyholders Deficit, EPD, siehe z. B. Butsic (1994). Nimmt man des Weiteren log-normalverteilte Risiken an, erhält man eine klassische Optionspreisformel, siehe das Deposit Insurance Pricing Model für Banken, Merton (1977).

Um eine geschlossene Formel für den Put zu erhalten nehmen wir bewusst zahlreiche Approximationen in Kauf. So ist die Zeit stetig, der Zeithorizont ist unendlich, es findet kein Bestandsabbau statt, es wird von nur einer Rechnungszinsgeneration mit Garantiezins mz ausgegangen und die Risiken werden nicht durch eine Mean Reversion abgemildert. Es ist eine künftige Aufgabe, eine geschlossene Formel für eine noch realistischere Abbildung zu finden. Der Sockel δ_{Basis} korrigiert die Überschätzung des Puffer Puts aufgrund der genannten Approximationen. Er ist in der Praxis ausreichend hoch anzusetzen, zumindest so hoch, dass $\delta > 0$ und damit der Puffer Put > 0 . Dies wird erreicht durch $\delta_{\text{Basis}} > -\ln(1 + r)$:

$$\delta = \delta_{\text{Basis}} + \ln(1 + r)$$

Bei $\delta = 0$ bewertet man die Kapitaleinschüsse, die so gewählt sind, dass die Ruinwahrscheinlichkeit minimiert wird. In diesem Fall geht der Wert des Puffer Puts für $m \leq 0$ allerdings gegen unendlich.

Der Wert der temporären Pufferungsmöglichkeit beträgt: $TP = \overline{PP}^{oTP} - \overline{PP} = 1/p \cdot (1 - e^{-p \cdot x}) \cdot (\text{Aktien} + FI) \leq x \cdot (\text{Aktien} + FI)$ mit $\overline{PP}^{oTP} = \overline{PP}(x = 0)$, also an der Stelle null. Also schlägt der Startpuffer insbesondere bei kleinen x fast voll entlastend auf den Wert des Puts durch.

Der innere Wert des Puffer Puts ist der Grenzwert des Optionswertes für σ gegen null. Im praxisrelevanten Fall $\delta > 0$ und $x \geq 0$ gilt:

$$IV(\overline{PP})^{\text{vor Max}} = (\text{Aktien} + FI) \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } m \geq 0 \\ \frac{1}{q} \cdot e^{-q \cdot x} & \text{für } m < 0 \end{cases}$$

mit

$$q = -\frac{\delta}{m}.$$

Man sieht, dass der innere Wert des Puffer Puts positiv wird, wenn der Driftterm negativ wird.

4.3) Die Anpassung an Solvency II

Da der innere Wert des Puffer Puts regelmäßig sehr niedrig ist, wird er noch auf einen Mindestwert angehoben, so dass der Kunde mindestens seine Garantie erhält. Dies ist für Solvency II erforderlich. Der Zeitwert wird entsprechend reduziert, wird aber nie negativ. Siehe Anhang 3. Insbesondere bei niedrigen Zinsen wird die Höhe des gesamten Puffer Puts dadurch angehoben:

$$IV(\overline{PP}) = \max \left(IV(\overline{PP})^{\text{vor Max}}; (-ZÜ(KA))^+ + (-ZÜ(VT))^+ \right),$$

$$TV(\overline{PP}) = \left(\overline{PP}^{\text{vor Max}} - IV(\overline{PP}) \right)^+.$$

Der Put insgesamt ist die Summe der Puts aus den beiden Gewinnquellen, $\text{Put} = \text{Put}(KA) + \text{Put}(VT)$, entsprechendes gilt für den inneren Wert und den Zeitwert:

$$IV(\text{Put}) = IV(\text{Put}, KA) + IV(\text{Put}, VT),$$

$$TV = TV(KA) + TV(VT).$$

Bei der Betrachtung von mehreren Gewinnquellen, hier KA und VT, würden die einzelnen Puts unterschätzt werden, wenn man ihnen jeweils den gesamten kollektiven Startpuffer x zur Verfügung stellt. Auf der anderen Seite würden die Puts überschätzt werden, wenn man den Startpuffer auf die Gewinnquellen aufteilt, denn über Rückversicherungslösungen ist eine Verschiebung über die Zeit und letztlich auch über die Gewinnquellen möglich. Wir wählen die auf der Subadditivität des Puffer Puts basierende konservative Variante, bei welcher der Startpuffer aufgeteilt wird. Um die resultierende Überschätzung der Puts möglichst gering zu halten, wird die Aufteilung robust so gewählt, dass die Summe der Puts vor Maximierung mit den negativen zukünftigen Überschüssen minimal ist:

$$x(KA) = x \cdot p(VT) / (p(KA) + p(VT)),$$

$$x(VT) = x - x(KA).$$

Der relative Startpuffer x umfasst die Puffer der handelsrechtlichen Bilanz und die maximalen Stillen Lasten MSL, welche berücksichtigen, dass (weitere) temporäre Stille Lasten bis zu dieser Höhe auf der Aktivseite aktiv aufgebaut werden können. Dies entspricht einer maximalen Glättung der Nettoverzinsung mittels aktiven Lastenaufbaus. Der Teil des Startpuffers, der aus realisierbaren Reserven und aufbaubaren Stillen Lasten kommt kann nicht negativ werden, da man unter HGB nicht zum sofortigen Auflösen der stillen Lasten gezwungen ist. Der relative Startpuffer x umfasst die aktivischen, aber nicht die passivischen Bewertungsreserven. Eine Zinssenkung erhöht also den Startpuffer.

Wenn kein Neugeschäft gezeichnet wird, kann der Limited Liability Put, LLP, gezogen werden welcher den Wert des gesamten Puts reduziert. Der LLP berechnet sich genauso, wie der Puffer Put selber, wobei der insgesamt verfügbare Startpuffer jedoch um das Eigenkapital zu erhöhen ist:

$$LLP = \overline{PP} \left(x + \frac{EK}{\text{Aktien} + FI} \right).$$

Dahinter steht die Annahme, dass durch die Nutzung der beschränkten Haftung nicht nur verlustreiches Neugeschäft vermieden werden kann, sondern sich der Verlust maximal auf das Eigenkapital beschränkt. Der Nettoeffekt aus dem short Puffer Put und dem long Limited Liability Put umfasst für $x > 0$ maximal das Eigenkapital. In der Literatur setzen zum Beispiel Briys und de Varenne (1997, 2001) den LLP bei der Bestimmung des Unternehmenswertes an. Dies bedeutet ökonomisch,

dass sich der Unternehmenswert durch die eigene Ausfallwahrscheinlichkeit erhöht, denn die Verbindlichkeiten werden im Insolvenzfall gekürzt.

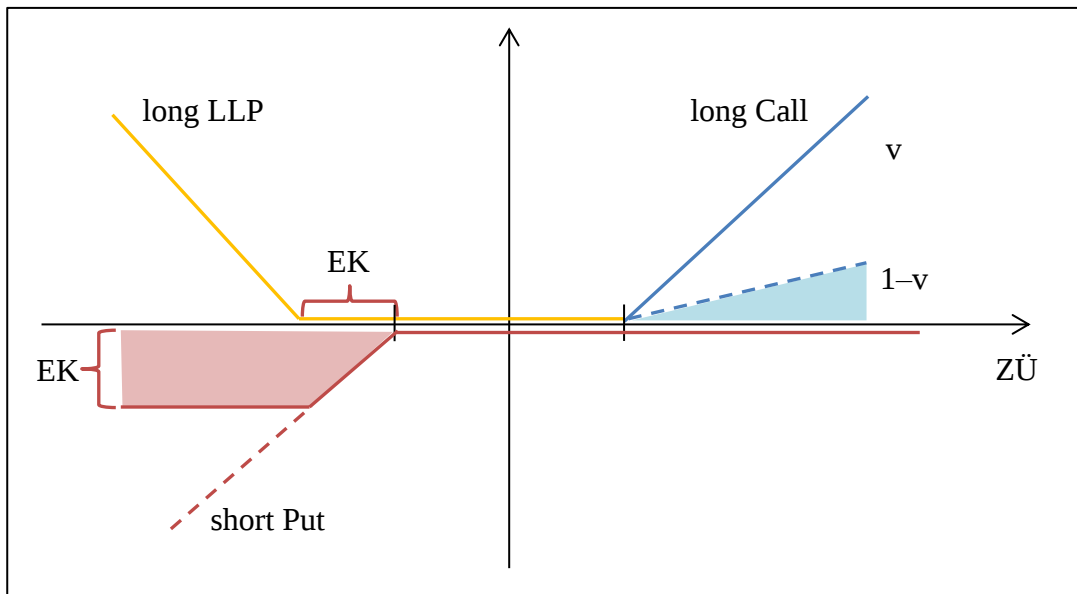


Abbildung 4: Optionen und Puffernutzung, mit Limited Liability Put

Abbildung 4 ergänzt die Abbildung 2 schematisch um den Limited Liability Put. Der Versicherungsnehmer partizipiert weiterhin mit seinem Anteil v am long Call, allerdings wird er ab einem gewissen Punkt voll an den Verlusten beteiligt, da der Versicherer die Verbindlichkeiten nicht begleicht und auch kein Kapital nachschießt.

Wird das Neugeschäft eingestellt so kann der Put mit Hilfe des LLP auf höchstens den Wert des Eigenkapitals reduziert werden:

$$PP(\cdot) = \begin{cases} \overline{PP}(\cdot, x) & \text{wenn NG} = 1 \\ \overline{PP}(\cdot, x) - \overline{PP}\left(\cdot, x + \frac{EK}{\text{Aktien} + FI}\right) & (\leq EK, \text{ bei } x \geq 0) \quad \text{wenn NG} = 0 \end{cases}$$

mit

$$x = \frac{\text{Call}_x + RfBEM + NGF}{\text{Aktien} + FI}$$

Die asymmetrische Berücksichtigung positiver Aktivreserven bzw. der Möglichkeit des Lastenaufbaus, aber kein Zwang zum Lastenabbau, führt zu einer zweiten Stelle, an der sich der Wert des Puffer Puts deutlich ändert: Neben dem „ersten Strike“ an der Stelle $ZÜ(KA) = 0$ weist der Puffer Put einen „zweiten Strike“ auf: dies ist die Stelle $(ABWR + MSL)^+ = 0$.

Der in der Formel verwendete Erwartungswert Call_x dient der Verstetigung des Puffer Puts: Er führt – rein mathematisch – zu einer Darstellung als Option. Der Zeitwert dieser Option vermeidet den unstetigen Punkt des relativen Startpuffers x an der Stelle des zweiten Strikes des Puffer Puts. Würde die Volatilität auf null gesetzt, so hätte der Erwartungswert keine Wirkung, der zweite Strike

würde sehr deutlich, was sogar insgesamt zu negativen Kapitalanforderungen in diesem Zinsbereich führen kann. Diese extreme Kalibrierung sollte in der Praxis vermieden werden. Call_x ist hier also europäischer Black-Scholes Call auf die Assets in Höhe von (Aktien + FI) mit Strike in Höhe des um die maximalen Stillen Lasten reduzierten Buchwerts (Aktien + FI – ABWR – MSL) und hier vereinfachend mit Zins null, Restlaufzeit eins und als Glättungsparameter für den zweiten Strike wird die Volatilität σ_x als Parameter vorgegeben:

$$\text{Call}_x = E((\text{ABWR} + \text{MSL})^+)$$

$$= (\text{Aktien} + \text{FI}) \cdot N(d_{x1}) - (\text{Aktien} + \text{FI} - \text{ABWR} - \text{MSL}) \cdot N(d_{x2})$$

mit

$$d_{x1} = \frac{\ln\left(\frac{\text{Aktien} + \text{FI}}{\text{Aktien} + \text{FI} - \text{ABWR} - \text{MSL}}\right) + \frac{\sigma_x^2}{2}}{\sigma_x},$$

$$d_{x2} = d_{x1} - \sigma_x.$$

Die maximalen Stillen Lasten werden auf die HGB-Bilanzsumme im Basisfall bezogen und f_{MSL} wird als Parameter vorgegeben:

$$\text{MSL} = f_{\text{MSL}} \cdot \text{HGBBS}_0.$$

Die Drift für die versicherungstechnische Gewinnquelle Risiko und Kosten beträgt:

$$m(\text{VT}) = -\frac{\text{NGF}}{\text{Aktien} + \text{FI}} \cdot \ln(1 + \text{ufr}).$$

Dabei sind NGF die Kosten der Neugeschäftsfinanzierung, also der Barwert der überrechnungsmäßigen Abschlusskostenverluste durch künftiges Neugeschäft NG. Der positive Ertragsbarwert des Neugeschäfts wird bei der reinen Bestandsbetrachtung nicht angesetzt. Aber die Veränderung des Gewinnprofils – Verluste am Anfang und entsprechende Gewinne später – kann berücksichtigt werden. Bei Verzicht auf Neugeschäft wird der Startpuffer daher um die NGF erhöht und die Drift entsprechend reduziert. Die Neugeschäftsfinanzierung wird approximiert als der Wert der überrechnungsmäßigen Abschlusskostenverluste für die nächsten 5 Neugeschäftsscheiben für eine Neugeschäftsbeitragssumme, die zur Unternehmensgröße passt. Für die Beitragssumme wird das Doppelte der gebuchten Bruttobeiträge angesetzt, welche so bestimmt werden, dass die Höhe der konventionellen Kapitalanlagen trotz Bestandsabbau gleich bleiben: $5 \cdot (\text{AKSatz} - \text{Höchstzillmersatz})^+ \cdot \text{Beitragssumme} \approx 5 \cdot (4\% - 2,5\%) \cdot 2 \cdot (\text{Aktien} + \text{FI}) \cdot \kappa_{\text{VT}}$, also:

$$\text{NGF} = \begin{cases} 0 & \text{wenn NG} = 1 \\ 15\% \cdot (\text{Aktien} + \text{FI}) \cdot \kappa_{\text{VT}} & \text{wenn NG} = 0. \end{cases}$$

Bei Verzicht auf Neugeschäft wird der versicherungstechnische Driftterm negativ, was zu einem geringen inneren Wert des Puffer Puts führt.

Die Drift für die Gewinnquelle Kapital beträgt:

$$\begin{aligned}
 m(KA) &= a \cdot m_{\text{Aktie}} && (\text{Aktien}) \\
 &+ (1 - a) \cdot (mr \cdot ufr + \text{spread}) && (\text{Spread}) \\
 &- \frac{(-PBWR)^+}{\text{Aktien} + FI} \cdot \ln(1 + ufr) && (\text{ZZR}) \\
 &- 50\% \cdot \frac{((ABWR)^+ - (-PBWR)^+)}{\text{Aktien} + FI} \cdot \ln(1 + ufr) && (\text{BWR}) \\
 &- lfd \cdot \frac{Z\ddot{U}(VN) + RfBEM}{\text{Aktien} + FI} \cdot \ln(1 + ufr). && (\text{lfd } \ddot{U}B)
 \end{aligned}$$

Der Kapitalanlagentrend $m(KA)$ setzt sich aus fünf Komponenten zusammen. Diese haben insgesamt einen sehr starken Einfluss auf die Solvabilitätsquote. Sie führen zu einer deutlich schärferen Kalibrierung als bei der Austauschoption, bei welcher diese Effekte nicht separat einstellbar sind:

1) Aktien: Bei der Gewinnquelle Kapital ist die Überrendite der Aktien, m_{Aktie} , über den risikolosen Zins hinaus zu berücksichtigen, da sich der Prozess X_t in der realen Welt und nicht in der risikoneutralen Welt bewegt. Die Größe m_{Aktie} wird als Parameter vorgegeben.

2) Bei langfristiger Kapitalanlage wird je nach Höhe der Mean Reversion und der ufr eine höhere Rendite verdient als bei kurzfristiger Anlage. Dies wird bei dieser Spreadkomponente berücksichtigt. Aufgrund der flachen Zinsstrukturkurve ist es im Modell sonst nicht möglich, über die typischerweise steigende Zinsstrukturkurve die Fristigkeitsprämie, die sogenannte Term Premium, zu verdienen. Zusätzlich wird im Sinne der Illiquiditätsprämie der Teil des Credit-Spreads angesetzt, der nicht auf Ausfallrisiko beruht und somit verdient werden kann.

3) ZZR: Der Barwert der handelsrechtlichen künftigen Zinszusatzreserve entspricht den Stillen Passivlasten in Höhe von $(-PBWR)^+$. Diese gesamte künftige Zinszusatzreserve wird in eine Rendite umgerechnet und der Aufwand über den (unendlichen) Zeithorizont verteilt.

4) BWR: Des Weiteren sind die Kunden zu 50% an den positiven aktivischen Bewertungsreserven zu beteiligen. Dabei wird der Sicherungsbedarf gemäß Lebensversicherungsreformgesetz in Abzug gebracht, siehe §56a VAG. Die Bewertungsreservenbeteiligung auf festverzinsliche Wertpapiere hat damit aktuell im Wesentlichen keinen Effekt mehr. Der Sicherungsbedarf entspricht den Stillen Passivlasten $(-PBWR)^+$. Zum einen wird hierbei ignoriert, dass sich der Sicherungsbedarf im Laufe der Zeit mit steigender Zinszusatzreserve reduziert und zum anderen wird die separate Bewertungsreservenbeteiligung an den Aktien und Immobilien ignoriert.

5) lfd $\ddot{U}B$: Schließlich wird der Anteil lfd der zukünftigen Überschussbeteiligung, der laufend zugeteilt wird, berücksichtigt, denn hierdurch werden künftige Puffer verbraucht und Garantien laufend erhöht. Da die $Z\ddot{U}(VN)$ selbst vom zu bestimmenden Put abhängen, werden diese iterativ im Excel-Modell bestimmt. Die Iteration von $Z\ddot{U}(VN)$ konvergiert wenn $\frac{\partial Z\ddot{U}(VN)}{\partial PP} \cdot \frac{\partial PP}{\partial Z\ddot{U}(VN)} < 1$ also wenn $\frac{\partial PP}{\partial Z\ddot{U}(VN)} < \frac{1}{\nu}$. Dies wird numerisch im Excel Modell geprüft. Somit kann der Puffer Put zwischen

laufender und Schlussüberschussbeteiligung unterscheiden. Bei niedrigen Zinsen führt ein höherer Anteil laufender Überschussbeteiligung zu einem höheren Wert des Puts, jedoch sinkt dann auch seine Zinssensitivität, so dass das SCR reduziert wird und sich die absolute Überdeckung unerwartet wenig ändert. Bei hohen Zinsen führt ein höherer Anteil an laufender Überschussbeteiligung zu einem höheren Wert des Puts der Gewinnquelle Kapital, da sein innerer Wert positiv wird. Daher liegt auch eine Zinssensitivität vor, das SCR reduziert sich nicht mehr so stark und die absolute Überdeckung sinkt wie erwartet.

Die Standardabweichung des Brownschen Prozesses für die Versicherungstechnik $\sigma(VT)$ wird als Parameter vorgegeben. Die Volatilität der Kapitalanlagen, also die Standardabweichung der Renditen, ergibt sich aus den als Parameter vorgegebenen Volatilitäten der Aktien und der Festverzinslichen Wertpapiere, σ_{Aktie} und σ_{Zins} , und der entsprechenden Portfoliozusammensetzung. Unter der vereinfachten Annahme der Unkorreliertheit von Zins und Aktien sowie der Unkorreliertheit von Zins- und Kreditrisiko ergibt sich mit Aktienquote a :

$$\sigma(KA) = \sqrt{a^2 \cdot \sigma_{\text{Aktie}}^2 + (1 - a)^2 \cdot (D_{\text{FI}}^2 \cdot \sigma_{\text{Zins}}^2 + \sigma_{\text{Kredit}}^2)}.$$

Im Gegensatz zu D_{FI} fließt D_{VT} nicht in diese Volatilität des handelsrechtlichen Rohüberschusses ein, denn gemäß Deckungsrückstellungsverordnung, siehe DeckRV (2011), ist die HGB-Deckungsrückstellung mit dem bei Vertragsabschluss geltenden Rechnungszins zu bewerten. Die Passivduration wirkt im Standardmodell allerdings über die Durationsapproximation in die Marktwerte PBWR und ZÜ ein.

Der Puffer Put zeichnet sich im Vergleich zur Austauschoption durch zwei Besonderheiten aus. Zum einen puffert der Startpuffer negative Kapitalmarktrenditen ab und dieser Puffer steigt wegen der handelsrechtlichen Bilanzierung sogar mit sinkenden Zinsen. Dies reduziert den Wert der Option sowie seine Zinssensitivität. Zum anderen beachtet der Puffer Put explizit die handelsrechtlichen Bilanzperioden, das heißt, es wird bewertet, welche Verluste das Versicherungsunternehmen in den einzelnen Perioden, die hier zeitkontinuierlich modelliert werden, tragen muss. Dies erhöht den Wert der Option. In Abschnitt 6 anhand eines Beispiels gezeigt, dass der zweite Effekt in der Praxis dominiert.

5) Embedded Value und Appraisal Value

Der ökonomische Bestandwert, Embedded Value, EV, umfasst die zukünftigen Aktionärsgewinne, die im Rahmen des Embedded Values auch Present Value of Future Profits, PVFP, genannt werden. Diese sind noch um die Risikomarge und die Steuern zu bereinigen. Schließlich ist das Eigenkapital, auch Net Asset Value, NAV, genannt, das eingezahlte (INJ positiv) oder entnommene Eigenkapital, sowie die Kapitalkosten auf das Eigenkapital zu ergänzen. Das eingezahlte Eigenkapital wird in Aktien und Immobilien angelegt. Es erhöht jedoch nicht den Embedded Value, da es zuvor eingeschossen werden muss, stattdessen führt es zu Kapitalkosten. Dies bedeutet, dass der Marktwert des Eigenkapitals geringer ist als sein nominaler Wert. Eigenkapital vernichtet also in der Regel Wert und sollte nur zur Erfüllung der angestrebten Solvabilitätsquote oder zur Reduktion des Werts des Puffer Puts investiert werden. Auf der anderen Seite führt weniger Eigenkapital zu einer höheren Ausfallwahrscheinlichkeit des Versicherungsunternehmens, wodurch der Kapitalkostensatz steigt. Der Kapitalkostensatz wird mit coc_{VU} bezeichnet und hängt von der Ausfallwahrscheinlichkeit des Versicherungsunternehmens ab:

$$\begin{aligned} EV &= ZÜ(VU) - RM - DT + EK - INJ - coc_{VU} \cdot D_{VT} \cdot EK \\ &= ASM - RfBEM - INJ - coc_{VU} \cdot D_{VT} \cdot EK. \end{aligned}$$

Im Unterschied zum Solvency II-Cashflowmodell wird beim Embedded Value zusätzlich der Wert der Eigenkapitalkosten abgezogen.

Analog zu der Modellierung des Kreditrisikos in Abschnitt 2.4 erhält man nun für das gesamte Versicherungsunternehmen die Kapitalkostenmarge über die Bestimmung des Kreditrisikosreads:

$$coc_{VU} = LGD \cdot pd_{VU} \cdot mf_{VU},$$

wobei der unternehmensbezogene Maturity Faktor von der als Parameter vorzugebenden Restlaufzeit rlz_{VU} abhängt, welche als mittlere Anlagedauer der Aktionäre anzusehen ist:

$$mf_{VU} = \frac{1 + (rlz_{VU} - 2,5) \cdot b_{VU}}{1 - 1,5 \cdot b_{VU}},$$

$$b_{VU} = (0,08451 - 0,05898 \cdot \ln(pd_{VU}))^2$$

und die Ausfallwahrscheinlichkeit des Versicherungsunternehmens beträgt unter der vereinfachenden Annahme eines normalverteilten Gesamtrisikos und der Annahme einer Mindestausfallwahrscheinlichkeit von 0,002%:

$$pd_{VU} = \max\left(N\left(0; \mu = ASM, \sigma = \frac{(SCR)^+}{2,58}\right); 0,002\%\right).$$

Der unternehmensindividuelle Kapitalkostensatz hängt stark von den ASM und dem SCR ab. Beide sind im Basisszenario bekannt. Im Stressszenario ist das SCR jedoch nicht bekannt, da hierfür wiederum weitere Stresse erforderlich wären.

Ergänzt man den Bestandwert um den Wert des künftigen Neugeschäfts, New Business Value, NBV inklusive der weiteren Kapitalkosten für das dauerhaft vorzuhaltende Kapital, so erhält man den Appraisal Value, AV. Wie nachfolgend erläutert, betragen die Kapitalkosten im Wesentlichen $\text{coc}_{\text{VU}}/\text{ufr} \cdot \text{EK}$ und sind damit in der Regel deutlich höher als das Eigenkapital selber. Der Appraisal Value entspricht im Prinzip der Summe aus zwei Bestandswerten: Zum einen dem eigentlichen Bestandwert EV, zum anderen dem künftigen Bestandwert NBV, der zu Beginn regelmäßig über Gewinnmargen verfügt:

$$\text{AV} = \text{EV} + \text{NBV}.$$

Für den Neugeschäftswert NBV gibt es zwei strategische Möglichkeiten, je nachdem ob weitere Kapitaleinschüsse zugelassen werden oder nicht: Entweder zeichnet man Neugeschäft NG und erzielt den New Business Value, NBV, verzichtet jedoch auf den Limited Liability Put LLP, siehe vorangehenden Abschnitt 4.3, oder man zieht den LLP und muss im Gegenzug auf künftiges Neugeschäft verzichten:

$$\text{NBV} = \begin{cases} \widetilde{\text{paf}} \cdot \kappa_{\text{VT}} \cdot \left(\widetilde{\text{ZÜ}}(\widetilde{\text{VU}}) - \widetilde{\text{DT}} \right) - (\widetilde{\text{paf}} - \widetilde{\text{D}}_{\text{VT}}) \cdot (\widetilde{\text{coc}}_{\text{VU}} \cdot \text{EK}) & \text{für NG} = 1 \\ 0 & \text{für NG} = 0. \end{cases}$$

Der gesamte künftige Ertrag wird mit dem in Anhang 5 hergeleiteten Neugeschäftsfaktor κ_{VT} auf den Wert einer Neugeschäftsscheibe umgerechnet. Wenn Neugeschäft gezeichnet wird, fallen zudem Kapitalkosten für einen dauerhaften Bestand an. Für diese Kosten ist es nicht erforderlich, den Weg über die Bewertung einer Neugeschäftsscheibe zu gehen, da direkt klar ist, dass der weiter unten erläuterte Barwertfaktor paf bei dauerhaftem Neugeschäft zu verwenden ist. Für das Auslaufen des aktuellen Bestands ist jedoch bereits der Abwicklungsbarwertfaktor $\widetilde{\text{D}}_{\text{VT}}$ angesetzt. Also ist für das künftige Neugeschäft nur noch die Differenz anzusetzen. Eine entsprechend erhöhte Risikomarge für das künftige Neugeschäft ist nicht anzusetzen, da man bei der Bestimmung der Risikomarge davon ausgeht, dass nur die Risiken für den Bestand anzusetzen sind.

Der Neugeschäftswert NBV ist der Barwert der künftigen Neugeschäftsscheiben. Der Wert einer einzelnen Neugeschäftsscheibe wird auch VANB, Value Added by New Business, genannt. Er setzt sich grundsätzlich aus den gleichen Komponenten zusammen, wie der Embedded Value: erwartete Aktionärerträge nach Steuern abzüglich der Risikomarge und Eigenkapitalkosten. Nicht erneut angesetzt wird das Eigenkapital. Auf einen zusätzlichen Bewertungsabschlag aufgrund der weiter in der Zukunft liegenden Zahlungsströme wird verzichtet, dieser Effekt wird durch die Risikomarge abgedeckt.

Der Bestandwert muss auf die zukünftig zu erwarteten, nachhaltigen VANB-Margen umgerechnet werden, um die richtige Bezugsgröße für den Neugeschäftswert zu erhalten. Diese Größen sind in der obigen Gleichung mit einer Schlange gekennzeichnet und werden bestimmt, nachdem die drei nachfolgenden Parameter wie folgt gesetzt wurden:

1) Künftiges Neugeschäft ist anzusetzen:

$$\widetilde{\text{NG}} \rightarrow 1.$$

- 2) Der Zins ist auf den nachhaltigen Zins zu setzen, der eine übliche Marge zu den gewährten Garantien enthält. Dabei orientieren wir uns an der Deckungsrückstellungsverordnung, DeckRV (2014), wonach die Garantie 60% des Marktzinses beträgt. Die Risiko- und Kostenmarge wird vereinfachend als unverändert angenommen:

$$\tilde{r} \rightarrow \frac{mrz}{0,6}.$$

- 3) Schließlich sind die festverzinslichen Wertpapiere so zu setzen, wie wenn man sie zum nachhaltigen Zins angelegt hätte. Die FI sind um die nachfolgende hergeleitete Zusatzmarge MFI zu erhöhen. Dies wird mit den verfügbaren Inputparametern erreicht durch eine genau so starke Erhöhung der Assets und der ABWR und einer entsprechenden Anpassung der Aktienquote und der FLV-Quote:

$$\widetilde{\text{Assets}} \rightarrow \text{Assets}_0 + \text{MFI},$$

$$\widetilde{\text{ABWR}} \rightarrow \text{ABWR}_0 + \text{MFI},$$

$$\tilde{a} \rightarrow \frac{\text{Aktien}_0}{\text{Aktien}_0 + \text{FI}_0 + \text{MFI}},$$

$$\widetilde{\text{flv}} \rightarrow \frac{\text{FLV}_0}{\text{Assets}_0 + \text{MFI}}$$

mit

$$\text{MFI} = \text{FI}_0 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}} + \frac{mrz}{0,6}}}{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}} + r_{\text{lfd}}}} - 1 \right).$$

Der ursprüngliche Wert der Fixed Income Titel wurde durchschnittlich zum laufenden Zins r_{lfd} angelegt und ist beim Zins r_0 genau FI_0 wert. Der ursprüngliche Wert der Anlage betrug also $\text{FI}_{\frac{mrz}{0,6}} = \text{FI}_0 \cdot \frac{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}} + r_0}}{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}} + r_{\text{lfd}}}}$. Den gleichen Wert hätte man zum nachhaltigen Zins angelegt. Um dies zu erreichen, muss man heute zum Zins r_0 genau den Wert $\tilde{\text{FI}}$ anlegen, der sich bestimmt aus $\text{FI}_{\frac{mrz}{0,6}} = \tilde{\text{FI}} \cdot \frac{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}} + r_0}}{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}} + \frac{mrz}{0,6}}}$. Damit erhält man insgesamt $\tilde{\text{FI}} = \text{FI}_0 \cdot \frac{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}} + \frac{mrz}{0,6}}}{1 - e^{-\kappa_{\text{FI}} + r_{\text{lfd}}}}$. Die zusätzliche FI-Marge beträgt $\text{MFI} = \tilde{\text{FI}} - \text{FI}_0$. Damit hängt der Neugeschäftswert NBV nicht vom aktuellen, sondern nur vom nachhaltigen Zinsniveau ab.

Als durchschnittlichen Anlagezins der Vergangenheit verwenden wir vereinfachend die laufende, um außerordentliche Effekte bereinigte, Durchschnittsverzinsung r_{lfd} des Unternehmens, ggf. zusätzlich bereinigt um den darin enthaltenen Kreditrisiko-Spread. Diese Kennzahl umfasst laufende Kupons und Dividenden der Aktien. Die laufende Durchschnittsverzinsung r_{lfd} ist zwar ein neuer Parameter, dies ist aber etwas einfacher, als die Herleitung eines entsprechende Parameters im Rahmen unseres Modells, welche als Input die Marktzinsen der Vergangenheit erfordert: Es könnte angenommen werden, dass jede einzelne Anlagescheibe sich in dem gleichen Maße geometrisch mit Rate κ_{FI} abbaut wie der gesamten Assets. Das Relative Gewicht einer vor τ Jahren angelegten

Scheibe beträgt dann: $w_\tau = e^{-\kappa_{FI} \cdot \tau} / \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\kappa_{FI} \cdot t} = (e^{\kappa_{FI}} - 1) \cdot e^{-\kappa_{FI} \cdot \tau}$, $\tau = 1, 2, \dots, \infty$. In Abhängigkeit von κ_{FI} ergäbe sich für die Renditen 10-jähriger deutscher Staatsanleihen folgende Funktion für den im Bestand befindlichen durchschnittlichen Anlagezins: $r_{lfd} = \sum_{\tau=1}^{\infty} (w_\tau \cdot r_{t-\tau}) = (e^{\kappa_{FI}} - 1) \cdot \sum_{\tau=1}^{\infty} (e^{-\kappa_{FI} \cdot \tau} \cdot r_{t-\tau})$.

Schließlich wird der so ermittelte Wert einer Neugeschäftsscheibe auf den gesamten Wert aller (unendlich vielen) künftigen Neugeschäftsscheiben hochgerechnet. Dies geschieht mittels des Preis-Absatz-Faktors, paf. Dabei wird der in Abschnitt 2.2 beschriebene Perpetuitätenfaktor $\text{perp} = 1/\text{ufr}$ der unendlichen Annuität erweitert. Es wird der Effekt der Marktpositionierung in Form der unternehmensindividuellen Gesamtverzinsung im Vergleich zum Marktdurchschnitt ergänzt. Damit wird der Preis als die den Absatz bestimmende Größe aufgenommen und der Faktor wird zum sogenannten Preis-Absatz-Faktor:

$$\text{paf} = \frac{1}{\text{ufr} - g} > 0.$$

Dabei beträgt das Neugeschäftswachstum aufgrund der Positionierung der Gesamtverzinsung im Markt:

$$g = \min \left(\text{gvzsensi} \cdot (v - v_{\text{Markt}}) \cdot \frac{\text{Call}}{\text{HGBDR} \cdot D_{VT}}; \text{ufr} - 1\% \right)$$

und diese Größe wird so modifiziert, dass die ufr nicht erreicht wird.

Der Preis-Absatz-Faktor paf ist der für die Neugeschäftsscheibe relevante Multiplikator, in Abhängigkeit vom Neugeschäftswachstum und Marktzins. Für den Gesamtmarkt wird vereinfachend von einem Null-Wachstum ausgegangen. Das individuelle Wachstum ergibt sich aus der wie folgt angenommenen Preis-Absatz-Funktion: Eine im Vergleich zum Marktdurchschnitt dauerhaft erhöhte Gesamtverzinsung um einen Prozentpunkt führt zu einem Wachstum des Neugeschäfts von gvzsensi% pro Jahr. Ein solcher Zusammenhang kann aus Marktdaten großer deutscher Versicherer über die letzten Jahre geschätzt werden, wobei sich allerdings keine statistischen Signifikanzen ergeben.

Der Preis-Absatz-Faktor paf ist der Barwertfaktor einer unendlichen nachschüssigen geometrischen Reihe mit Wachstumsrate g und konstantem Zins ufr: $\text{paf} = 1/(\text{ufr} - g)$ und die Wachstumsrate beträgt gemäß Preis-Absatz-Funktion $g_{\text{Basis}} = \text{gvzsensi} \cdot \Delta \text{gvz}$ mit $\Delta \text{gvz} \approx (v - v_{\text{Markt}}) \cdot \text{Call}/(\text{HGBDR} \cdot D_{VT})$, siehe Abschnitt 3.1. Die Markt-Beteiligungsquote v_{Markt} und gvzsensi werden als Parameter vorgegeben.

Eine höhere Beteiligungsquote v führt zu einem geringeren Embedded Value. Beim Neugeschäftswert ist zu unterscheiden zwischen dem geringeren Wert einer Neugeschäftsscheibe (negativer Margeneffekt) und dem höheren Preis-Absatz-Faktor (positiver Volumeneffekt). Welcher Effekt dominiert hängt von den konkreten Gegebenheiten ab. Die Beteiligungsquote kann in den Grenzen der Mindestzuführung optimal gewählt werden.

6) Ergebnisse eines Beispielversicherers

In diesem Abschnitt wird das einfache Solvenzmodell anhand eines markttypischen Lebensversicherers dargestellt.

6.1) Inputparameter

Wir verwenden für unser Beispiel folgenden Input für die Bewertung des Puffer Puts, der Austauschoption und die Bestimmung der jeweiligen Solvabilitätsquote. Wir unterscheiden nach individuellen Parametern, die nur für den betrachteten Lebensversicherer gelten und nach allgemeinen Parametern, die für alle Lebensversicherer gleichermaßen gelten. Das Zinsniveau beträgt $r = 2,66\%$, die Aktivduration beträgt $D_{FI} = 8,1$ und die Aktien- und Immobilienquote $a = 5,1\%$. Diese Parameter werden später variiert. Angaben in TEUR:

Individuelle Parameter		Allgemeine Parameter	
D_{FI}	8,10	r	2,66%
a	5,10%	$oprisk$	2,00%
pd	0,020%	rlz_{VU}	10,00
Assets	10.000,00 €	LGD	50,00%
ABWR	1.000,00 €	m_{Aktie}	6,00%
EK	200,00 €	σ_{Aktie}	20,00%
INJ	0,00 €	$vt risk$	0,50%
fr.RfB	300,00 €	σ_{Zins}	0,80%
SÜAF	150,00 €	COC	6,00%
D_{VT}	12,00	s_{min}	5,00%
flv	10,00%	s_{max}	25,00%
mrz	3,30%	μ_{VNO}	3,00%
m_{VT}	0,60%	σ_{VNO}	2,00%
v	85,00%	mr	5,00%
lfd	50,00%	ufr	3,50%
tax	30,00%	v_{Markt}	90,00%
r_{lfd}	4,01%	$gvzsensi$	10,00
r	2,66%	f_{MSL}	5,00%
NG	1	δ_{Basis}	6,00%
		$\sigma(VT)$	1,00%
		σ_x	10,00%
		$O_{C \rightarrow A}$	WAHR

Tabelle 2: Inputparameter des Beispiels

Die gesamten Ergebnisse sind im Excel-Sheet dargestellt. Hier werden nur zentrale Ergebnisse vorgestellt. Die Austauschoption wird in der Variante $AO_{C \rightarrow A}$ verwendet.

6.2) Marktwertbilanz

Aus den Inputparametern ergeben sich die folgenden Passivseiten der HGB- und Marktwertbilanzen. Letztere werden für Austauschoption und Puffer Put dargestellt:

HGB-Bilanz

EK	200,00 €
RfBEM	450,00 €
HGBDR	7.350,00 €
PBWR	-35,28 €
Garantie	7.385,28 €
FLV	1.000,00 €
HGBBS	9.000,00 €

**Marktwertbilanz
Austauschoption**

EK	200,00 €
RfBEM	450,00 €
ZÜ(VU)	-130,94 €
$(1-v) \cdot \text{Call}$	193,71 €
–Put	-324,64 €
–(RM+DT)	-370,45 €
VNO	-2,01 €
RM	390,09 €
DT	-19,64 €
ZÜ(VN)	1.097,66 €
Garantie	7.385,28 €
FLV	1.000,00 €
Assets	10.000,00 €

**Marktwertbilanz
Puffer Put**

EK	200,00 €
RfBEM	450,00 €
ZÜ(VU)	-226,73 €
$(1-v) \cdot \text{Call}$	210,61 €
–Put	-437,35 €
–(RM+DT)	-197,05 €
VNO	-2,01 €
RM	231,06 €
DT	-34,01 €
ZÜ(VN)	1.193,46 €
Garantie	7.385,28 €
FLV	1.000,00 €
Assets	10.000,00 €

Tabelle 3: Passivseiten der HGB- und Marktwertbilanzen

6.3) Vergleich der Optionen bezüglich Zinsniveau

Die Ergebnisse werden graphisch in Abhängigkeit des Zinsniveaus dargestellt. Der innere Wert und der Zeitwert der Versicherungsnehmeroption sind hier als gestapelte Flächen dargestellt und ergeben zusammen die Überschussbeteiligung:

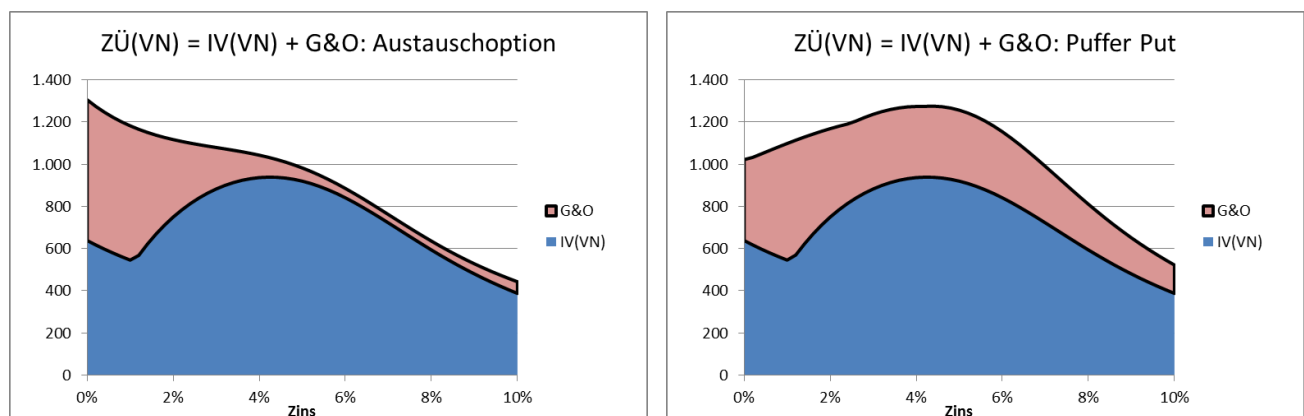


Abbildung 5: Zukünftige Überschussbeteiligung nach innerem Wert und Zeitwert bzgl. Zins

Die separate Darstellung der Zeitwerte, zeigt die deutlich unterschiedliche Struktur:

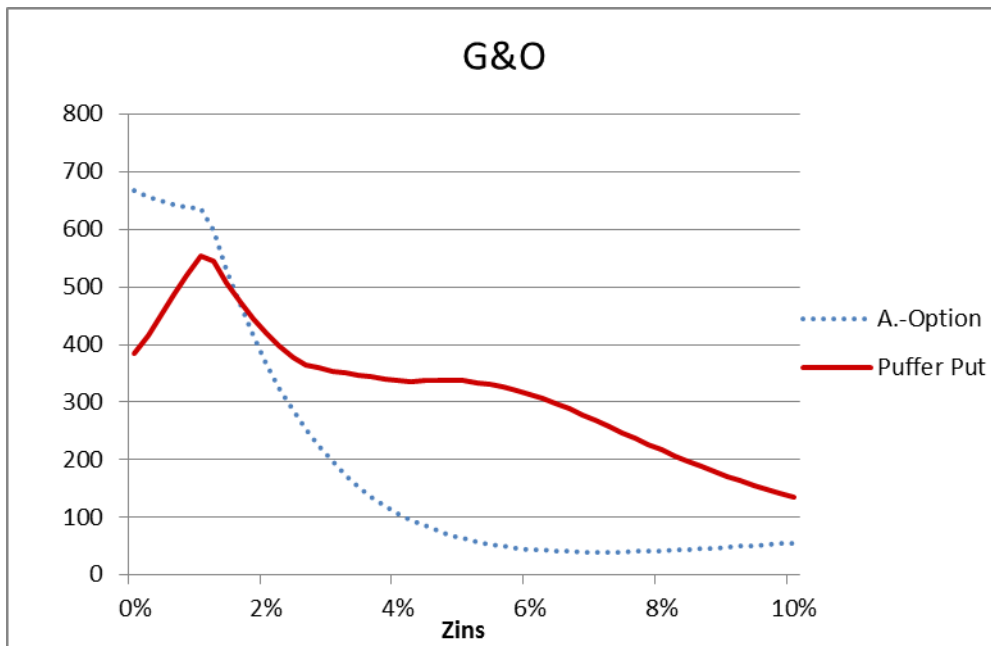


Abbildung 6: Zeitwerte der Versicherungsnehmer-Option bzgl. Zins

Der Zeitwert der Austauschoption weist nicht die für Black-Scholes übliche Dreiecksstruktur auf. Zwar weist der Zeitwert einen Knick an der Stelle auf, an der der Strike der Option liegt. Der Zeitwert nimmt hier jedoch nicht sein Maximum an, sondern steigt mit fallenden Zinsen weiter an. Grund ist, dass der Strike selber zinsabhängig ist: Der Barwert der Garantie steigt mit fallenden Zinsen, und zwar stärker als die Aktiva ansteigen. Der Strike ist bei der Austauschoption erreicht, wenn $ZÜ(KA) = 0$, also die Option am Geld ist. Beim Puffer Put wird die Überlagerung aus den zwei Optionen der beiden separaten Gewinnquellen sichtbar: ein kleiner Grundanteil stammt aus der zinsunabhängigen versicherungstechnischen Option. Neben dem „ersten Strike“ an der Stelle $ZÜ(KA) = 0$ weist der Puffer Put einen „zweiten Strike“ auf: dies ist die Stelle $(ABWR + MSL)^+ = 0$, ab der sich der Startpuffer mehr verändert. Dann sind die aktivischen Bewertungsreserven so negativ, dass die maximal zulässigen Stillen Lasten MSL überschritten sind. Bis zu diesem Punkt nimmt der Zeitwert des Puffer Puts schwächer ab, da immer weniger Puffermittel zur Verfügung stehen. Danach tritt die stärkere Reduktion des Zeitwerts ein. Bei niedrigen Zinsen ist der Zeitwert des Puffer Puts kleiner als der der Austauschoption. Grund ist, dass bei niedrigen Zinsen hohe aktivische Bewertungsreserven zur Pufferung verfügbar sind.

Der innere Wert der Option entspricht, analog zur Mindestzuführungsverordnung, der Summe der positiven Gewinnquellen, multipliziert mit dem Beteiligungssatz, siehe Anhang 3. Der leicht fallende Grundverlauf sind die versicherungstechnischen Gewinne und der zusätzliche Buckel sind die Kapitalgewinne. Letztere nehmen bei steigenden Zinsen zuerst zu, fallen dann aber, wenn die Passiva sich schon stark der Null genähert haben und die Aktiva ab dann stärker fallen.

Die Werte der Garantien und Optionen (G&O) sowie der Versicherungsnehmeroptionen (VNO) sind künftig mit dem Standard-Simulationsmodell zu vergleichen, welches mittelfristig das Standard-Cashflowmodell ablösen soll. Die Vorgängerversion des Simulationsmodells ist in Heinen (2011) beschrieben. Mit Hilfe eines solchen stochastischen Modells kann überprüft werden, ob eher die Austauschoption oder eher der Puffer Put eine geeignete geschlossene formelmäßige Approximation der zugrunde liegenden Option darstellt.

Die ökonomischen Eigenmittel und die Kapitalanforderung weisen folgende Entwicklung auf:

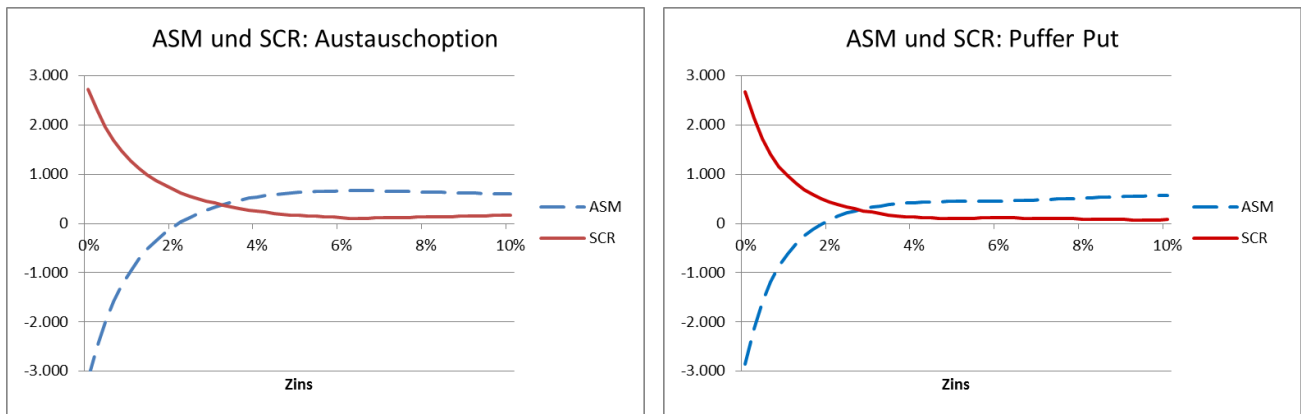


Abbildung 7: Ökonomische Eigenmittel und Kapitalanforderung bzgl. Zins

Beim Puffer Put gibt es ein lokal optimales Zinsniveau. Bei diesen Zinsen ist die Kapitalanforderung gering, denn fallende Zinsen führen zu aktivischen Bewertungsreserven, die den Wert des Puffer Puts stark reduzieren. Ein optimales Zinsniveau gab es auch in dem ersten Vorschlag des GDV für ein Solvency II Standardmodell, siehe GDV (2005). Dort resultierte das Zinsanstiegsrisiko aus der steigenden Stornoquote in Kombination mit den garantierten Rückkaufswerten, welche den Zeitwert der Kapitalanlagen überstiegen. Diese Aspekte sind hier in den Versicherungsnehmer-Optionen VNO abgebildet, welche allerdings in beiden Zinsszenarien angesetzt werden.

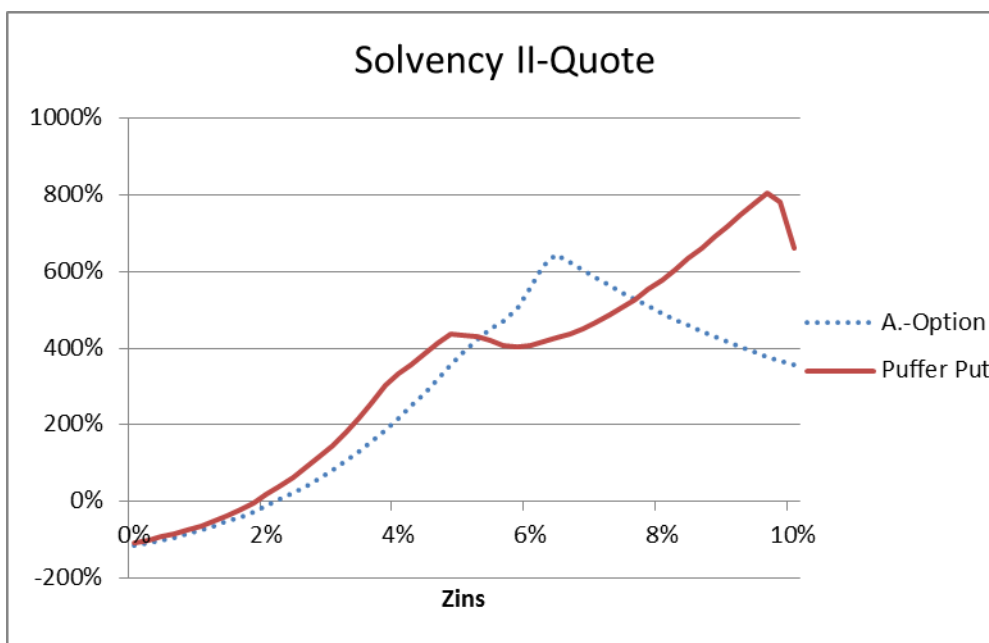


Abbildung 8: Solvency II-Quote bzgl. Zins

Durch den starken Anstieg des Puffer Puts wird die positive Wirkung des Zinsanstiegs im mittelhohen Zinsbereich kompensiert. Da die Kapitalanforderung sehr klein werden kann, wird die Interpretation der Solvabilitätsquote in diesen Fällen erschwert. Es ist einfacher, die stabile Differenz zwischen ASM und SCR, also die absolute Überdeckung oder die Deckungslücke zu interpretieren.

Briys und de Varenne (2001, 1997) berichten, dass der Börsenwert französischer Versicherer bei einem starken Zinsanstieg deutlich zurück ging, begründen dies aber mit der Rückkaufoption und dem Limited Liability Put.

6.4) Vergleich der Optionen bezüglich Aktivduration

Ausgehend von dem Zinsniveau ohne antizyklische Prämie von $r = 2,66\%$ und einer Aktienquote von $5,1\%$ wird nun analysiert, wie sich die Aktivduration auf die Solvabilitätssituation auswirkt. Eine Erhöhung der Aktivduration reduziert bis zum optimalen Durationsmatch den Wert der Austauschoption. Der Wert des Puffer Puts steigt allerdings, da der verfügbare Startpuffer durch Zinsanstiege gefährdet wird.

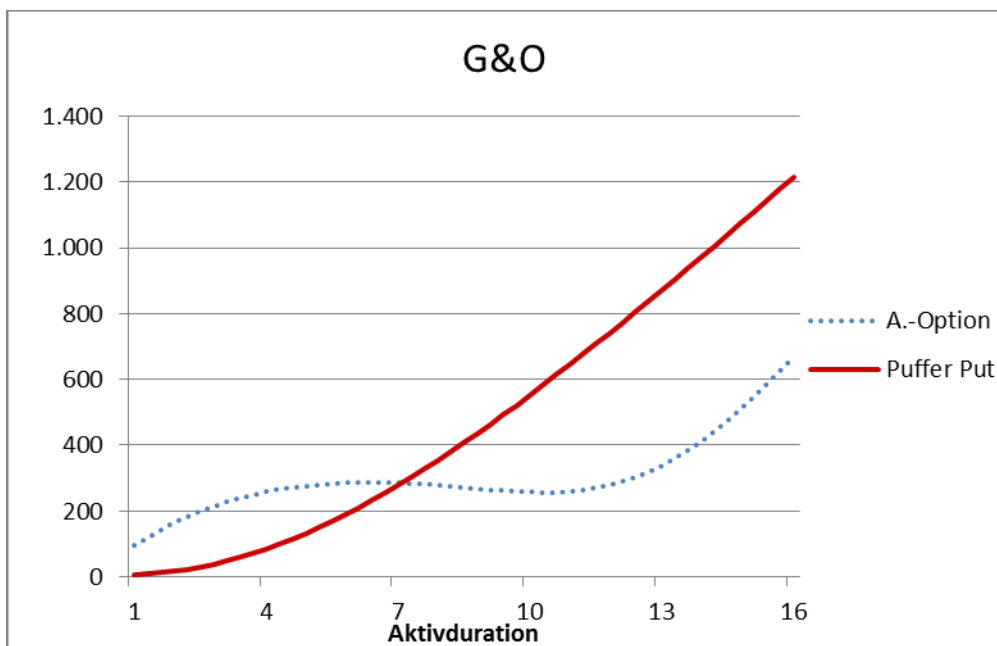


Abbildung 9: Zeitwerte der Versicherungsnehmer-Option bzgl. Aktivduration

Sofern nicht in risikolosen EU-Staatsanleihen investiert wird, konterkariert das steigende Kreditrisiko zum Teil die positive Wirkung des Durationsmatches. Bei hohen Aktivdurationen dominiert das Zinsanstiegsrisiko.

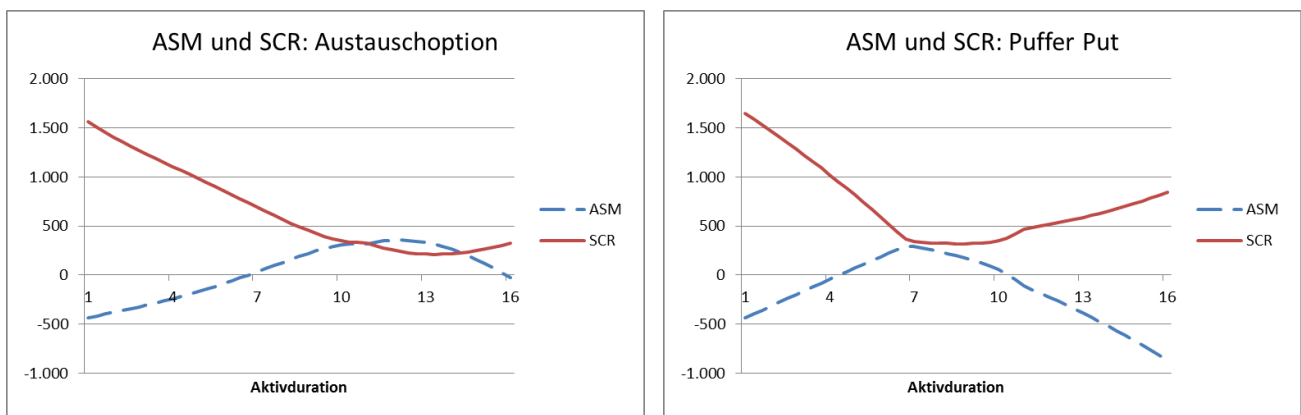


Abbildung 10: Ökonomische Eigenmittel und Kapitalanforderung bzgl. Aktivduration

Der Puffer Put wird mit der hohen Aktivduration und somit einer hohen Aktivvolatilität sehr teuer und die ökonomischen Eigenmittel sinken. Dies wird auch an der stark fallenden Solvabilitätsquote deutlich. Sehr klar zu erkennen ist, dass die optimale Aktivduration bei der Austauschoption sehr hoch ist und praktisch der Passivduration entspricht. Ein Schließen der Durationslücke wird hier also belohnt. Hingegen ist die Solvabilitätsquote beim Puffer Put bei einer mittleren Aktivduration maximal. Die beiden Optionen liefern bezüglich der Aktivduration also gänzlich gegensätzliche Steuerungsimpulse.

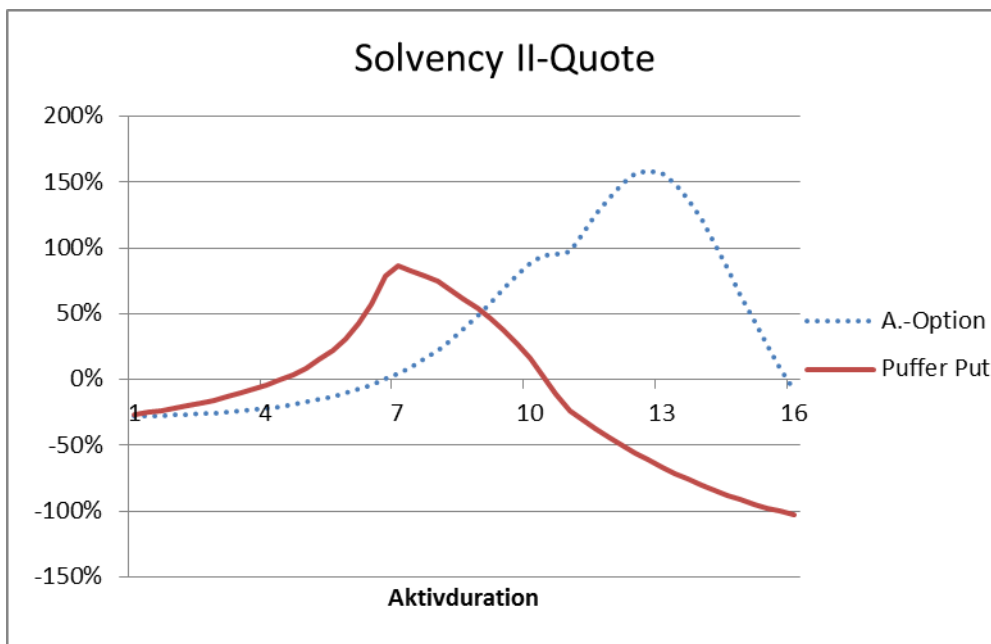


Abbildung 11: Solvency II-Quote bzgl. Aktivduration

Der Puffer Put passt offensichtlich deutlich besser zu den in der Praxis beobachteten Aktivdurationsen.

6.5) Vergleich der Optionen bezüglich Aktienquote

Ausgehend von dem Zinsniveau ohne antizyklische Prämie von $r = 2,66\%$ und der Aktivduration von 8,1 wird nun analysiert, wie sich die Aktienquote auf die Solvabilitätssituation auswirkt.

Die Volatilität der Aktivseite steigt mit der Aktienquote. Hinzu kommt, dass die in Aktien investierten Gelder nicht zum Durationsmatching verwendet werden können. Der Wert der der Austauschoption steigt. Beim Puffer Put ist eine Durationsmatching bei niedrigen Zinsen nicht hilfreich, da dies den Startpuffer gefährdet. Aktieninvestments werden zudem durch eine Überrendite belohnt.

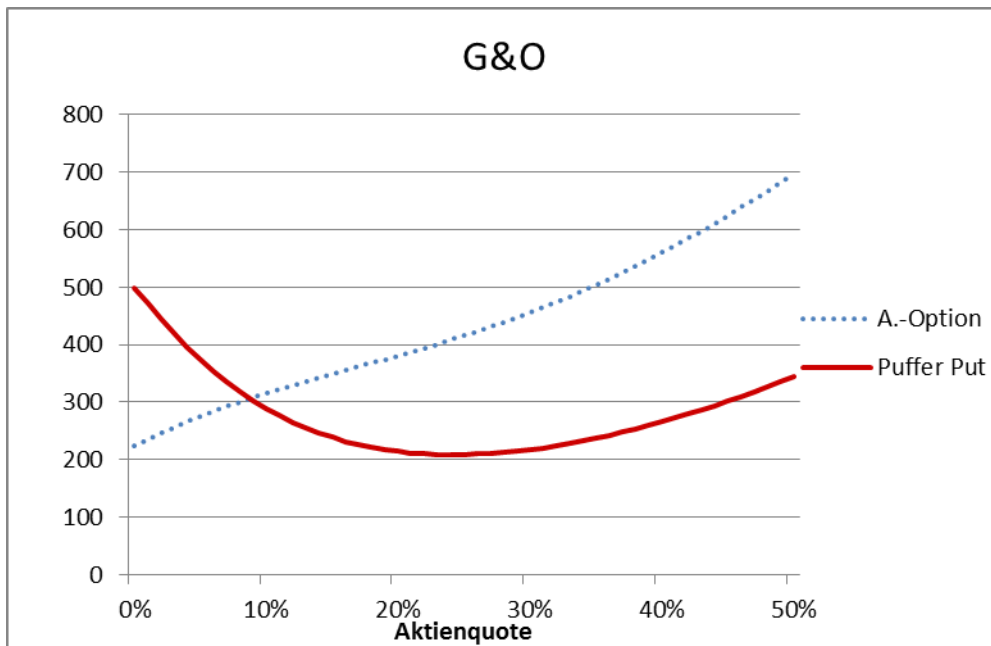


Abbildung 12: Zeitwerte der Versicherungsnehmer-Option bzgl. Aktienquote

Die ökonomischen Eigenmittel und die Kapitalanforderung hängen wie folgt von der Aktienquote ab:

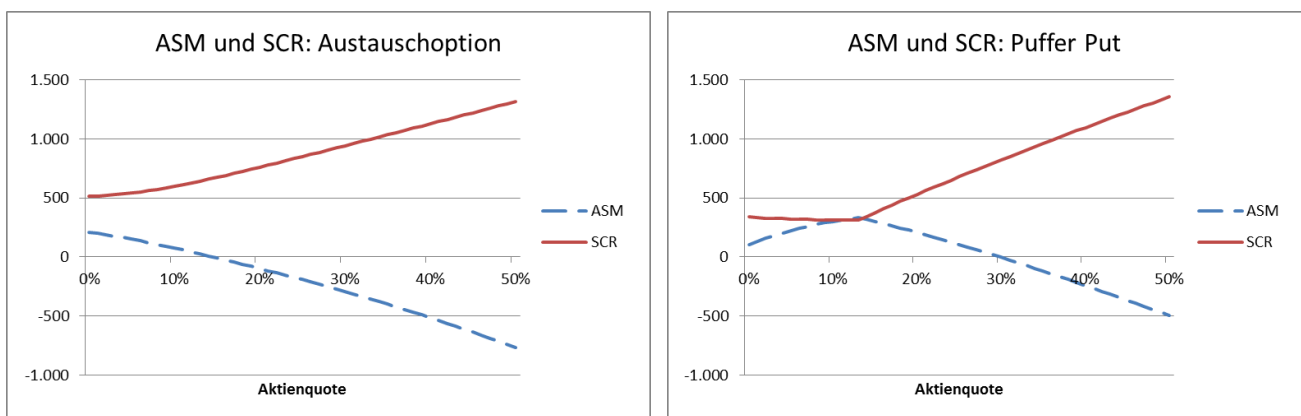


Abbildung 13: Ökonomische Eigenmittel und Kapitalanforderung bzgl. Aktienquote

Die Kapitalanforderung steigt aufgrund des hohen und linear mit der Aktienquote zunehmenden Aktienrisikos. Entgegen der Intuition aus der allgemeinen Portfoliotheorie, nach welcher alle Assets einen strikt positiven Investmentanteil im Risikominimum haben, führt eine Aktienquote von null zur minimalen Kapitalanforderung. Dies liegt daran, dass bei jeder Asset Allokation ein ALM-Zinsrisiko verbleibt. Um das große Zinsrisiko der Passivseite zu hedgen, wäre ein entsprechendes festverzinsliches Investment auf der Aktivseite nötig. Dies gelingt wegen der kürzeren Aktivdurationszeit nicht und würde durch ein Investment in Aktien noch weiter eingeschränkt werden.

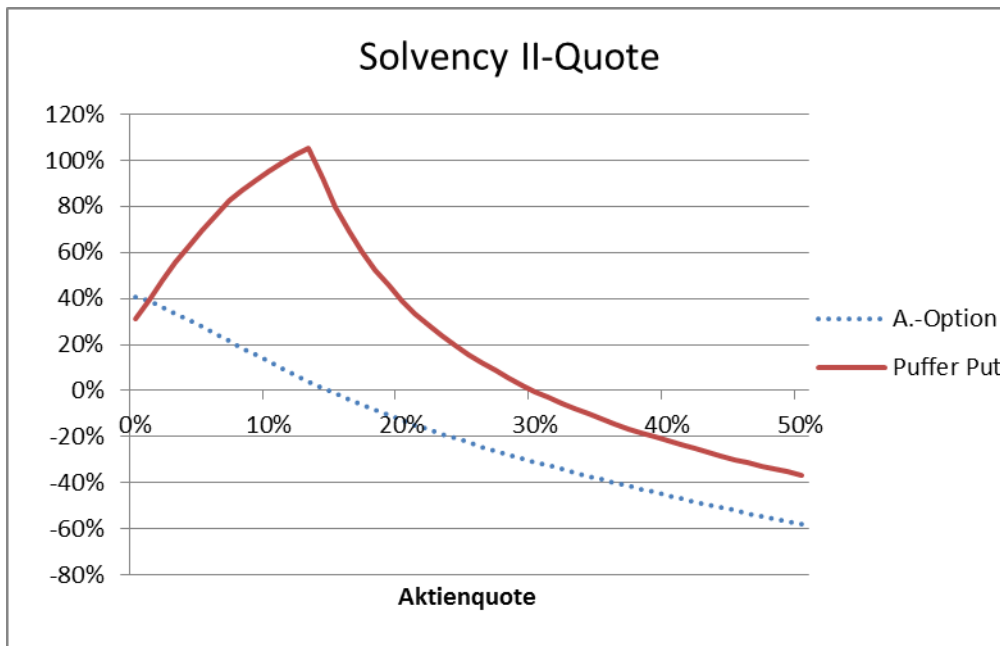


Abbildung 14: Solvency II-Quote bzgl. Aktienquote

Während die Austauschoption zu einem völligen Verzicht auf Aktien drängt, entspricht die optimale Aktienquote beim Puffer Put der Realität, wie im nächsten Abschnitt genauer dargestellt.

Anhang 1: Kreditrisiko

Das Kreditrisiko umfasst hier vereinfacht das Ausfallrisiko und das Spreadrisiko.

$\text{creditrisk} = \text{defaultrisk} + \text{spreadrisk}$.

Das Spreadrisiko übernimmt die Rolle der Illiquiditätsprämie, welche bei Halten bis zur Endfälligkeit verdient werden kann. Insbesondere bei mehrjährigen Investments ist in den am Markt beobachtbaren Spreads neben dem eigentlichen Ausfallrisiko auch das Spreadänderungsrisiko bzw. das Ratingmigrationsrisiko enthalten, da das Risiko der Ratingverschlechterung zu einer höheren Renditeanforderung führt. Dieses Änderungsrisiko ordnen wir dem Spreadrisiko zu.

Das Ausfallrisiko, ausgedrückt als Faktor bezogen auf die ausfallrisikobehafteten Investments, beträgt gemäß Vasicek (2002):

$$\text{defaultrisk} = \text{LGD} \cdot N \left(\frac{N^{-1}(\text{pd}) + \sqrt{\rho_{\text{Kredit}}} \cdot 2,58}{\sqrt{1 - \rho_{\text{Kredit}}}} \right).$$

Die Probability of Default, pd , ist die mittlere Ausfallwahrscheinlichkeit des FI-Portfolios. Vasicek (2002) hat eine Verallgemeinerung der hier verwendeten Vasicek-Kreditrisikoverteilung vorgeschlagen. Denn eigentlich müsste die Ausfallwahrscheinlichkeit in eine mehrjährige Ausfallwahrscheinlichkeit passend zur Restlaufzeit der Aktiva umgerechnet werden und das resultierende Spreadrisiko danach auf den betrachteten Zeithorizont heruntergerechnet werden. Wir folgen stattdessen dem Basel II-Ansatz und verwenden den unten dargestellten Maturity Faktor.

Dabei ist ρ_{Kredit} ist die Korrelation der kreditrisikobehafteten Assets. Im Rahmen von Basel II wird angenommen, dass die Korrelation mit steigender Ausfallwahrscheinlichkeit fällt und sich insgesamt in einem Intervall zwischen 0,12 und 0,24 bewegt, siehe Basel Committee on Banking Supervision (2005), Albrecht (2006):

$$\rho_{\text{Kredit}} = 0,12 \cdot \frac{1 - e^{-50 \cdot \text{pd}}}{1 - e^{-50}} + 0,24 \cdot \left(1 - \frac{1 - e^{-50 \cdot \text{pd}}}{1 - e^{-50}} \right).$$

Bei Ausfall wird davon ausgegangen, dass immer der gleiche Anteil ausfällt, der sogenannte Loss Given Default, LGD. Die Vasicek-Kreditrisikoverteilung setzt ein in der Praxis nicht vorhandenes breit diversifiziertes Portfolio voraus. Das tatsächliche Kreditrisiko ist also höher. Die Vasicek-Verteilung wird auch in Risikoanalysen der DAV AG Bewertung von Garantien (2012a, b) verwendet.

In Rahmen von Basel II, siehe Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004), wird ebenfalls die Vasicek-Kreditrisikoverteilung verwendet:

Basel II umfasst sowohl das Ausfall- als auch das Spreadänderungsrisiko:

$\text{creditrisk} = \text{defaultrisk} \cdot \text{mf}$,

wobei der Maturity Faktor, mf, das von der Restlaufzeit der Aktiva getriebene Spreadänderungsrisiko abbildet:

$$mf = \frac{1 + (rlz - 2,5) \cdot b}{1 - 1,5 \cdot b} > 0 \text{ für } pd \geq 0,002\%.$$

Für $rlz = 1$ ist $mf = 1$, das heißt, dass der Maturity Faktor nur bei höheren Restlaufzeiten auch einen Spread-Anteil umfasst. Ferner verwenden wir im Sinne von Solvency II die ältere Variante des Faktors b , welche neben dem unerwarteten auch den erwarteten Schaden umfasst, siehe Basel Committee on Banking Supervision (2004):

$$b = (0,08451 - 0,05898 \cdot \ln(pd))^2.$$

Die Kalibrierung des Maturity Faktors weist für sehr geringe Ausfallwahrscheinlichkeiten aber starke Schwächen auf: Zum Beispiel kann der Nenner negativ werden bei kleinen, aber positiven, Ausfallwahrscheinlichkeiten und Restlaufzeiten größer eins, was zu einem negativen Maturity Faktor führt. Für den Extremfall, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit gegen null geht, beträgt der Maturity Faktor $(5 - 2 \cdot D_{FI,0})/3$ und fällt sogar mit der Restlaufzeit und ein negativer Maturity Faktor tritt ab einer Restlaufzeit von 2,5 auf. Würde man versuchen, diese Fehler durch eine Maximierung des Maturity Faktors mit null zu beheben, so könnten diese kleinen Ausfallwahrscheinlichkeiten fälschlicherweise ohne Risikokapitalanforderung verdient werden. Daher wird die Funktion mf auf den Bereich beschränkt, in dem sie positiv ist, mit der Restlaufzeit steigt und mit der Ausfallwahrscheinlichkeit fällt. Dies wird erreicht, indem die Mindestausfallwahrscheinlichkeit auf 0.002% gesetzt wird.

Der Spread – nicht jedoch der auf das Ausfallrisiko entfallende Anteil der Überrendite – kann vom Versicherungsunternehmen tatsächlich verdient werden, wenn das festverzinsliche Wertpapier bis zum Ablauf gehalten wird. Der Spread wird angesetzt als der Erwartungswert des creditrisks:

$$\begin{aligned} \text{spread} &= E(\text{creditrisk} - \text{LGD} \cdot pd) \\ &= E(\text{defaultrisk}) \cdot mf - \text{LGD} \cdot pd \\ &= \text{LGD} \cdot pd \cdot mf - \text{LGD} \cdot pd \\ &= \text{LGD} \cdot pd \cdot (mf - 1). \end{aligned}$$

Tabelle 4 gibt ein Beispiel für die beschriebenen Kreditrisikogrößen. Die empirischen Ausfallwahrscheinlichkeiten pd in Abhängigkeit der Ratingeinstufung sind gemäß QIS6, siehe GDV (2012a), angesetzt. Der restlaufzeitabhängige spread kann beim Halten bis zur Endfälligkeit verdient werden. Das defaultrisk beschreibt das Risiko eines Ausfalls bei gegebenen Loss Given Default. Die restlaufzeitabhängigen Kreditrisikofaktoren creditrisk folgen dem in Basel II verwendeten Vasicek Kreditrisikomodell. Sie steigen mit der Restlaufzeit und einer Rating-Verschlechterung stark an.

Rating	pd	spread			default risk	creditrisk		
		rlz = 4	rlz = 8	rlz =12		rlz = 4	rlz = 8	rlz =12
AAA	0,002%	0,01%	0,02%	0,04%	0,03%	0,26%	0,63%	1,13%
AA	0,010%	0,02%	0,04%	0,08%	0,12%	0,52%	1,18%	2,05%
A	0,050%	0,04%	0,11%	0,21%	0,49%	1,34%	2,73%	4,55%
BBB	0,240%	0,11%	0,30%	0,55%	1,75%	3,41%	6,12%	9,68%
BB	1,200%	0,30%	0,80%	1,45%	5,09%	7,67%	11,88%	17,40%
B	4,175%	0,60%	1,59%	2,88%	9,97%	12,85%	17,56%	23,75%
C	4,175%	0,60%	1,59%	2,88%	9,97%	12,85%	17,56%	23,75%

Tabelle 4: Kreditrisikofaktoren nach Rating und Restlaufzeit (für LGD = 50%, r = 2,66%)

Insgesamt erscheint die Verwendung des Basel II-Ansatzes auch für Zwecke von Solvency II geeignet, obwohl er zu geringeren Kapitalanforderungen führt.

Die Varianz der Rendite der ausfallrisikobehafteten Investments, welche für die Varianz der Kapitalanlagerendite benötigt wird, wird hier mit Hilfe einer Approximation der bivariaten Normalverteilung $N_2(x, x; \rho) \approx (N(x))^2 + \rho \cdot (n(x))^2$ bestimmt, wobei $n(\cdot)$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist, siehe Vasicek (2002). Spreadrisiken fließen dort nicht ein, so dass noch die Multiplikation mit dem Faktor mf^2 erforderlich ist:

$$\sigma_{\text{Kredit}}^2 = mf^2 \cdot [N_2(N^{-1}(pd), N^{-1}(pd); \rho_{\text{Kredit}}) - pd^2]$$

$$\approx mf^2 \cdot \rho_{\text{Kredit}} \cdot (n(N^{-1}(pd)))^2.$$

Eine Alternative, die für große ρ_{Kredit} und kleine pd höhere Varianzen liefert, wäre Drezner und Wesolowsky (1989, Seite 103), siehe auch West (2005) für entsprechenden Visual Basic Code.

Anhang 2: Durationeigenschaften

Die modifizierte Duration bietet neben der Zinssensitivität auch noch weitere Interpretationen, die für das einfache Solvency Modell mit flacher Zinsstrukturkurve nützlich sind. Wie nachfolgend gezeigt, entspricht die Passivduration dem Abwicklungsbarwertfaktor.

Die Garantie ist zu jedem Zeitpunkt t der Barwert aller garantierten künftigen Cashflows:

$$\text{Garantie}_t = \sum_{\tau \geq 1} (\text{CF}_{t+\tau} \cdot v_\tau) \text{ für } t \geq 0$$

mit dem Spezialfall für $t = 0$:

$$\text{Garantie} = \sum_{\tau \geq 1} (\text{CF}_\tau \cdot v_\tau).$$

Dabei ist CF_t der Netto-Cashflow für $t = 1, 2, \dots, \infty$ aus künftigen Leistungen minus künftigen Beiträgen, mit best estimate Sterblichkeit und Kosten und unter Ansatz von Storno und Kapitalabfindung. Die Barwertbildung erfolgt mit dem annahmegemäß konstanten risikolosen Marktzins r bzw. mit dem Diskontfaktor

$$v_t = \frac{1}{(1+r)^t} = v^t = e^{-\ln(1+r) \cdot t}.$$

und wir bezeichnen hier kurz $v_1 = v$.

Wir nehmen einen geometrischen Bestandsabbau mit der Rate $\kappa_{VT} > 0$ an. Dies bedeutet insbesondere, dass der Bestand positiv ist und es im Verlauf auch bleibt. Zu jedem Zeitpunkt gilt, dass die Summe der noch ausstehenden Cashflows um die Rate κ_{VT} kleiner ist als ein Zeitpunkt vorher. Damit ist auch jeder einzelne Cashflow entsprechend kleiner als der Vorherige und dieses Muster gilt unabhängig vom Zins auch für die Garantiewerte:

$$\frac{\sum_{\tau \geq t+1} \text{CF}_\tau}{\sum_{\tau \geq t} \text{CF}_\tau} = \frac{\text{CF}_{t+1}}{\text{CF}_t} = \frac{\text{Garantie}_{t+1}}{\text{Garantie}_t} = e^{-\kappa_{VT}},$$

$$\text{Garantie}_t = \text{Garantie} \cdot e^{-\kappa_{VT} \cdot t} \quad \text{für } t \geq 0,$$

$$\text{CF}_1 = \text{Garantie} \cdot e^{-\kappa_{VT}} \cdot (e^{\kappa_{VT} + \ln(1+r)} - 1) = \text{Garantie} / D_{VT} \quad \text{für } r > e^{-\kappa_{VT}} - 1,$$

$$\text{CF}_t = e^{-\kappa_{VT} \cdot (t-1)} \cdot \text{CF}_1 = \text{Garantie} \cdot \frac{e^{-\kappa_{VT} \cdot (t-1)}}{D_{VT}} \quad \text{für } t \geq 1.$$

Die modifizierte Passivduration als Maß für die Zinssensitivität ist definiert als die negative relative Ableitung des Marktwertes der Garantie nach dem Marktzins. Nachfolgend wird $\sum_{t \geq 1} (t \cdot e^{-x \cdot t} \cdot (e^x - 1)) = \frac{e^x}{e^x - 1}$ unter der Nebenbedingung $r > e^{-\kappa_{VT}} - 1 \approx -\kappa_{VT}$ bzw. $r > e^{-\kappa_{FI}} - 1 \approx -\kappa_{FI}$ verwendet. Zusammen gilt die Anforderung:

$$r > \max(e^{-\kappa_{VT}}; e^{-\kappa_{FI}}) - 1.$$

Der Zins darf also leicht negativ werden. Man erhält also die folgende positive Duration:

$$\begin{aligned}
 D_{VT} &= D_{VT}(r) \\
 &= -\frac{d \text{ Garantie}}{d r} \cdot \frac{1}{\text{Garantie}} \\
 &= \frac{v \cdot \sum_{t \geq 1} (t \cdot CF_t \cdot v_t)}{\text{Garantie}} \\
 &= \frac{v \cdot \sum_{t \geq 1} (t \cdot e^{-\kappa_{VT} \cdot (t-1)} \cdot CF_1 \cdot e^{-\ln(1+r) \cdot t})}{\text{Garantie}} \\
 &= v \cdot \sum_{t \geq 1} \left(t \cdot e^{-(\kappa_{VT} + \ln(1+r)) \cdot t} \cdot (e^{\kappa_{VT} + \ln(1+r)} - 1) \right) \\
 &= v \cdot \frac{e^{\kappa_{VT} + \ln(1+r)}}{e^{\kappa_{VT} + \ln(1+r)} - 1} \\
 &= \frac{e^{\kappa_{VT}}}{e^{\kappa_{VT}} \cdot (1+r) - 1} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-\kappa_{VT}} + r} > 0 \\
 &\approx \frac{1}{\kappa_{VT} + r}.
 \end{aligned}$$

Damit kann man die Bestandsabbaurate gemeinsam aus Duration und Zins, z. B. der zu Beginn gegebenen Passivduration $D_{VT}(r_0)$ und dem Zinsniveau r_0 , bestimmen:

$$\kappa_{VT} = -\ln \left(1 - \frac{1}{D_{VT}(r_0)} + r_0 \right) \approx \frac{1}{D_{VT}(r_0)} - r_0.$$

Die Bestandsabbaurate ist eine Konstante und unabhängig von späteren Änderungen des Zinses und der Passivduration. Zins und Passivduration können sich im Modell nur konsistent zueinander verändern, so dass die Bestandsabbaurate konstant bleibt. Damit sie positiv und definiert ist, $\kappa_{VT} > 0$, müssen folgende Beziehungen zwischen den Ausgangsgrößen gelten:

$$\frac{1}{1+r_0} < D_{VT}(r_0) < \frac{1}{r_0}.$$

Entsprechend wird für die Aktivduration vorgegangen, wobei also für die festverzinslichen Wertpapiere ebenfalls ein geometrischer Bestandsabbau angenommen wird:

$$D_{FI} = D_{FI}(r) = \frac{1}{1 - e^{-\kappa_{FI}} + r} > 0$$

mit

$$\kappa_{FI} = -\ln\left(1 - \frac{1}{D_{FI}(r_0)} + r_0\right) \approx \frac{1}{D_{FI}(r_0)} - r_0$$

und für $\kappa_{FI} > 0$ müssen folgende Beziehungen zwischen den Ausgangsgrößen gelten:

$$\frac{1}{1 + r_0} < D_{FI}(r_0) < \frac{1}{r_0}.$$

Der Abwicklungsbarwertfaktor ist definiert als der Barwert des relativen Bestandsabwicklungsmusters:

$$\text{abf} = \frac{\sum_{t \geq 0} (\text{Garantie}_t \cdot v_{t+1})}{\text{Garantie}}.$$

Nachfolgend wird $\sum_{t \geq 0} e^{-x \cdot t} = \frac{e^x}{e^x - 1}$ unter der Nebenbedingung $r > e^{-\kappa_{VT}} - 1$ genutzt. Man erhält:

$$\begin{aligned} \text{abf} \cdot \text{Garantie} &= \sum_{t \geq 0} (\text{Garantie}_t \cdot v_{t+1}) \\ &= \sum_{t \geq 0} (\text{Garantie} \cdot e^{-\kappa_{VT} \cdot t} \cdot v_{t+1}) \\ &= \text{Garantie} \cdot v \cdot \sum_{t \geq 0} (e^{-(\kappa_{VT} + \ln(1+r)) \cdot t}) \\ &= \text{Garantie} \cdot v \cdot \frac{e^{\kappa_{VT} + \ln(1+r)}}{e^{\kappa_{VT} + \ln(1+r)} - 1} \\ &= \text{Garantie} \cdot \frac{1}{1 + r - e^{-\kappa_{VT}}} \\ &= \text{Garantie} \cdot D_{VT}. \end{aligned}$$

Also gilt unter der Annahme des geometrischen Bestandsabbaus:

$$\text{abf} = D_{VT}.$$

Die Restlaufzeit des Bestands wird für die Austauschoption benötigt. Unter der Nebenbedingung $\kappa_{VT} > 0$, welche bereits gemäß obiger Annahmen erfüllt ist, beträgt sie:

$$\begin{aligned} \text{rlz} &= \frac{\sum_{t \geq 1} (t \cdot CF_t)}{\sum_{t \geq 1} (CF_t)} \\ &= \frac{\sum_{t \geq 1} (t \cdot e^{-\kappa_{VT} \cdot (t-1)} \cdot CF_1)}{\sum_{t \geq 1} (e^{-\kappa_{VT} \cdot (t-1)} \cdot CF_1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{e^{k_{VT}}}{e^{k_{VT}} - 1}$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-k_{VT}}}.$$

Dies entspricht der Duration bei Zins $r = 0$.

Wir betrachten nun die Zinsabhängigkeit der Duration. Neben der üblichen Konvexität ist die Duration der Duration ein geeignetes Maß hierfür:

$$D_{D_{VT}} = -\frac{1}{D_{VT}} \cdot \frac{d D_{VT}}{d r}$$

$$= \frac{1}{D_{VT}} \cdot \left(\frac{d^2 \text{Garantie}}{d r^2} \cdot \frac{1}{\text{Garantie}} + \frac{d \text{Garantie}}{d r} \cdot \frac{d \frac{1}{\text{Garantie}}}{d r} \right)$$

$$= \frac{1}{D_{VT}} \cdot \left(C_{VT} - D_{VT} \cdot \text{Garantie} \cdot \frac{D_{VT}}{\text{Garantie}} \right)$$

$$= \frac{1}{D_{VT}} \cdot (C_{VT} - D_{VT}^2).$$

Die Duration der Duration ist bei dem angenommenen geometrischen Bestandsabbau positiv und entspricht der Duration selber:

$$D_{D_{VT}} = -\frac{1}{D_{VT}} \cdot \frac{d D_{VT}}{d r}$$

$$= -\frac{1}{D_{VT}} \cdot \frac{d \frac{1}{1 - e^{-k_{VT}} + r}}{d r}$$

$$= -\frac{1}{D_{VT}} \cdot \frac{-1}{(1 - e^{-k_{VT}} + r)^2}$$

$$= \frac{1}{D_{VT}} \cdot D_{VT}^2$$

$$= D_{VT}.$$

Entsprechend gilt für die folgenden Durationen der Duration $D_{D_{VT}}^{(n)} = D_{VT}$.

Mit geometrischem Bestandsabbau, also $D_{VT} = \frac{1}{1 - e^{-k_{VT} + r}}$, gilt für die n-te Ableitung:

$$\frac{d^n \text{Garantie}(r)}{d r^n} = (-1)^n \cdot n! \cdot \text{Garantie}(r) \cdot D_{VT}^n(r).$$

Wir verwenden nun die komplette Taylor-Entwicklung sowie $\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ unter den Nebenbedingungen $r, r_0 > e^{-k_{VT}} - 1$, wobei die Anforderung an r_0 aufgrund unserer Anforderung an die Beziehung der Inputgrößen $\frac{1}{1+r_0} < D_{VT}(r_0) < \frac{1}{r_0}$ erfüllt ist. Eine obere Schranke $r < 2 \cdot r_0 - e^{-k_{VT}} + 1$ greift nicht, da man iterativ stets knapp unter dieser bleiben kann von diesem Niveau ausgehend erneut die Garantie zu diesem Zinsniveau bestimmen kann. Mit dem Zins $r_0 = mrz - m_{VT}$ erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} \text{Garantie} &= \text{Garantie}(r) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left. \frac{d^n \text{Garantie}(r)}{d r^n} \right|_{r_0} \cdot \frac{1}{n!} \cdot (r - r_0)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \cdot n! \cdot \text{Garantie}(r_0) \cdot D_{VT}^n(r_0) \cdot \frac{1}{n!} \cdot (r - r_0)^n \\ &= \text{Garantie}(r_0) \cdot \sum_{n \geq 0} (-D_{VT}(r_0) \cdot (r - r_0))^n \\ &= \text{Garantie}(r_0) \cdot \frac{1}{1 - (-D_{VT}(r_0) \cdot (r - r_0))} \\ &= \frac{\text{Garantie}(r_0)}{1 + D_{VT}(r_0) \cdot (r - r_0)} \\ &= \text{Garantie}(r_0) \cdot \frac{D_{VT}(r)}{D_{VT}(r_0)}. \end{aligned}$$

Gegeben sind der Marktzins r_0 zum Stichtag, die entsprechende Duration $D_{VT}(r_0)$, sowie $\text{HGBDR} = \text{Garantie}(r_{\text{HGB}})$ zum Zins $r_{\text{HGB}} = mrz - m_{VT}$. Daraus ergibt sich die zum anfänglichen Marktzins geltende Garantie:

$$\text{Garantie}(r_0) = \text{HGBDR} \cdot (1 + D_{VT}(r_0) \cdot (mrz - m_{VT} - r_0)).$$

Damit erhält man nun eine Darstellung für die Garantie zu beliebigem Zinsniveau, die nicht explizit von den zu Beginn gegebenen Marktwerten abhängt:

$$\begin{aligned}
 \text{Garantie}(r) &= \frac{\text{Garantie}(r_0)}{1 + D_{VT}(r_0) \cdot (r - r_0)} \\
 &= \text{HGBDR} \cdot \frac{1 + D_{VT}(r_0) \cdot (mrz - m_{VT} - r_0)}{1 + D_{VT}(r_0) \cdot (r - r_0)} \\
 &= \text{HGBDR} \cdot \frac{1 - e^{-K_{VT}} + mrz - m_{VT}}{1 - e^{-K_{VT}} + r}.
 \end{aligned}$$

Die zukünftigen Gewinne aus der Biometrie-Marge vor Stress betragen dann:

$$\begin{aligned}
 \text{ZÜ}(VT) &= (\text{HGBDR} - \text{Garantie}(mrz)) \cdot \frac{D_{VT}(r)}{D_{VT}(mrz)} \\
 &= (\text{Garantie}(mrz - m_{VT}) - \text{Garantie}(mrz)) \cdot \frac{D_{VT}(r)}{D_{VT}(mrz)} \\
 &= m_{VT} \cdot \text{HGBDR} \cdot D_{VT}(r).
 \end{aligned}$$

Für die festverzinslichen Wertpapiere erhält man ein entsprechendes Ergebnis, unter den Nebenbedingungen $r, r_0 > e^{-K_{FI}} - 1$, wobei die Anforderung an r_0 aufgrund unserer Anforderung an die Beziehung der Inputgrößen $\frac{1}{1+r_0} < D_{FI}(r_0) < \frac{1}{r_0}$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
 FI(r) &= FI(r_0) \cdot \frac{D_{FI}(r)}{D_{FI}(r_0)} \\
 &= FI(r_0) \cdot \frac{1 - e^{-K_{FI}} + r_0}{1 - e^{-K_{FI}} + r}.
 \end{aligned}$$

Hallerbach (2001) hat eine pauschale Konvexitätskorrektur der Ausgangsduration vorgeschlagen. Diese führt im Fall des geometrischen Bestandsabbaus zu der von uns verwendeten Duration:

$$D_{VT}^{\text{Hallerbach}}(r) = \frac{D_{VT}(r_0)}{1 + D_{VT}(r_0) \cdot (r - r_0)} = D_{VT}(r).$$

Die Duration wird hiermit bei nicht geometrischem Bestandsabbau, insbesondere bei niedrigen Zinsen, zum Teil extrem überschätzt. Damit fallen die Marktwerte zu hoch aus. Dies ist konservativ, da die Passivduration in der Regel höher ist als die Aktivduration. Bei sehr niedrigen Zinsen kann die Duration allerdings auf der anderen Seite sogar negativ werden.

Eine Alternative wäre die Verwendung der Exponentialfunktion für die Ausgangsduration $D_{VT}(r_0)$, welche an der Stelle $r_0 = (mrz - m_{VT})$ zu berechnen ist. Dadurch würde eine pauschale Konvexitätskorrektur durchgeführt und negative Durationen für sehr hohe Zinsniveaus vermieden werden.

Diese Approximation wird jedoch nicht verwendet, da sie eine konstante Duration und Konvexität hat:

$$\text{Garantie}(r) \approx \text{HGBDR} \cdot e^{-D_{VT}(r_0) \cdot (r - (mrz - m_{VT}))},$$

$$D_{VT}(r) = -\frac{d \text{ Garantie}(r)}{d r} \cdot \frac{1}{\text{Garantie}(r)} = D_{VT}(r_0),$$

$$C_{VT}(r) = \frac{d^2 \text{ Garantie}(r)}{d r^2} \cdot \frac{1}{\text{Garantie}(r)} = D_{VT}^2(r_0).$$

Wie die Zerlegung der modifizierten Konvexität $C_{VT} = D_{VT}^2 - \frac{d D_{VT}}{d r}$ zeigt, handelt es sich um den Spezialfall, bei dem sich die Duration nicht mit dem Zins ändert, aber trotzdem Konvexität vorliegt. Die Duration der Duration ist null. Die Hyperkonvexität beträgt $H_{VT} = -\frac{d^3 \text{ Garantie}(r)}{d r^3} \cdot \frac{1}{\text{Garantie}(r)} = D_{VT}^3(r_0)$ und so weiter.

Anhang 3: Innerer Wert und Zeitwert

Eine Option kann in ihren inneren Wert IV (inner value) und ihren Zeitwert TV (time value) zerlegt werden. Der innere Wert wird definiert als der Grenzwert des Optionswertes, wenn die Volatilität gegen null geht. Der Rest ist der Zeitwert, welcher ausschließlich darauf beruht, dass die Option aufgrund künftiger Schwankungen (weiter) ins Geld kommt.

Damit der Call stets positiv ist und die Garantie nie unterschritten wird, muss der Put je Gewinnquelle eine Mindestgröße in Höhe der negativen zukünftigen Überschüsse erreichen:

$$\text{Call}(\cdot) = \text{ZÜ}(\cdot) + \text{Put}(\cdot) \geq 0,$$

so dass sich folgende Mindestgrößen für den gesamten Put über alle Gewinnquellen und den inneren Wert Kundenbeteiligung ergeben:

$$\text{IV}(\text{Put})^{\text{Mind}} = (-\text{ZÜ}(\text{KA}))^+ + (-\text{ZÜ}(\text{VT}))^+,$$

$$\text{IV}(\text{VN})^{\text{Mind}} = v \cdot ((\text{ZÜ}(\text{KA}))^+ + (\text{ZÜ}(\text{VT}))^+).$$

Die Austauschoption, AO, siehe Anhang 4, erreicht in der Variante $\overline{\text{AO}}_{\text{C} \rightarrow \text{A}}$ den Mindestwert bereits genau durch ihren inneren Wert und in der Variante $\overline{\text{AO}}_{\text{B} \rightarrow \text{A}}$ wird der Mindestwert erreicht oder sogar überschritten:

$$\text{IV}(\overline{\text{AO}}) = \begin{cases} (A - B)^+ = \max((-\text{ZÜ})^+; (-\text{ZÜ}(\text{KA}))^+) & \text{für } \overline{\text{AO}}_{\text{B} \rightarrow \text{A}} \\ (A - C)^+ = \text{IV}(\text{Put})^{\text{Mind}} & \text{für } \overline{\text{AO}}_{\text{C} \rightarrow \text{A}}. \end{cases}$$

Der Puffer Put hat geringe innere Werte. Er wird pro Gewinnquelle auf die jeweiligen negativen zukünftigen Überschüsse angehoben. Für die Summe über alle Gewinnquellen ergibt sich:

$$\text{IV}(\overline{\text{PP}}) = \max(\text{IV}(\overline{\text{PP}})^{\text{vor Max}}; \text{IV}(\overline{\text{PP}})^{\text{Mind}}),$$

$$\overline{\text{PP}} = \text{IV}(\overline{\text{PP}}) + \text{TV}(\overline{\text{PP}})$$

und der Zeitwert wird entsprechend angepasst:

$$\text{TV}(\overline{\text{PP}}) = (\overline{\text{PP}}^{\text{vor Max}} - \text{IV}(\overline{\text{PP}}))^+.$$

Der Puffer Put vor Maximierung beträgt:

$$\overline{\text{PP}}^{\text{vor Max}} = (\text{Aktien} + \text{FI}) \cdot \begin{cases} \frac{1}{p} - x & x < 0 \\ \frac{1}{p} e^{-px} & x \geq 0 \end{cases}$$

mit

$$p = \frac{m + \sqrt{m^2 + 2\delta\sigma^2}}{\sigma^2}.$$

Der innere Wert des Puffer Puts vor Maximierung ist nach folgenden Fällen zu unterscheiden:

$IV(\overline{PP})^{\text{vor Max}} / (\text{Aktien} + FI)$	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$\delta = 0$	keine Lösung		$\begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$
$-\frac{m^2}{2\sigma^2} < \delta < 0$			
$\delta > 0$			
	$\begin{cases} \frac{1}{q} - x & x < 0 \\ \frac{1}{q} e^{-qx} & x \geq 0 \end{cases}$		

Tabelle 5: Innere Werte des Puffer Puts

mit

$$q = -\frac{\delta}{m}.$$

Die G&O messen im Rahmen einer stochastischen Simulation den Zeitwert der Option. Ohne Stochastik entwickeln sich alle Modellgrößen auf dem sogenannten Mittleren Pfad. Dieser ist deterministisch und glatt, also nicht durch Zufallsschwankungen verrauscht. Auf dem Mittleren Pfad realisieren sich die inneren Werte und es gilt insbesondere:

$$IV(Z\ddot{U}) = IV(\text{Call}) - IV(\text{Put}) = Z\ddot{U}.$$

Die $Z\ddot{U}(VU)$ sind der Mittelwert über alle Pfade. Damit sind die $G\&O(VU)$ automatisch vom deterministischen Wert abgezogen:

$$Z\ddot{U}(VU) = IV(VU) - G\&O(VU)$$

mit

$$IV(VU) = (1-v) \cdot IV(\text{Call}) - IV(\text{Put})$$

$$= (1-v) \cdot Z\ddot{U} - v \cdot IV(\text{Put}),$$

$$G\&O(VU) = IV(VU) - Z\ddot{U}(VU)$$

$$= [(1-v) \cdot IV(\text{Call}) - IV(\text{Put})] - [(1-v) \cdot \text{Call} - \text{Put}]$$

$$= v \cdot TV.$$

Die G&O aus Versicherungsnehmersicht sind entsprechend definiert als

$$Z\ddot{U}(VN) = IV(VN) + G\&O(VN)$$

mit

$$IV(VN) = v \cdot IV(\text{Call})$$

$$= v \cdot (Z\ddot{U} + IV(\text{Put}))$$

und aus der Bilanzgleichung folgt direkt die Identität

$$G\&O(VU) = G\&O(VN) = G\&O.$$

Die inneren Werte der VU- und VN-Option addieren sich also zu $Z\ddot{U}$ und die Zeitwerte addieren sich zu null:

$$G\&O = -TV(VU) = TV(VN) = v \cdot TV$$

mit

$$TV = TV(\text{Call}) = TV(\text{Put}).$$

Anhang 4: Die Austauschoption

In der quantitativen Auswirkungsstudie QIS 6 des GDV (2012a, 2012b) und im LTGA wird der Wert des Puts mit Hilfe der Austauschoption in einer geschlossenen Formel abgebildet. Die Austauschoption wurde von Margrabe (1978) eingeführt und ist eine Verallgemeinerung der bekannten Formel von Black und Scholes (1973). Der Unterschied besteht darin, dass man in der Austauschoption das Recht auf den Barwert der Garantieleistungen hat, welcher wegen des stochastischen Zinses selbst stochastisch ist, während die Black-Scholes-Formel eine nominal fixe Garantie gibt. Im Versicherungskontext ist daher die Austauschoption angemessen, siehe auch Jurin und Margrabe (2005), welche dieses Instrument im Rahmen der Bewertung eines Defined Benefit-Pensionsplans anwenden. Die Austauschoption ermöglicht es, bei Fälligkeit der Option das bestehende Portfolio mit heutigem Wert B gegen das Portfolio mit heutigem Wert A zu tauschen. Beide Portfolios sind stochastisch, während bei der üblichen Black-Scholes-Formel der Strike konstant ist.

Die Austauschoption geht von einer geometrischen Brownschen Bewegung für die Risiken aus. Es wird also die risikomindernde Tatsache ignoriert, dass das zentrale Zinsrisiko über eine Mean Reversion verfügt, siehe das Vasicek-Zinsmodell in Abschnitt 2.2. Die Austauschoption überschätzt in dieser Hinsicht das Risiko. Auf der anderen Seite ignoriert die Austauschoption die handelsrechtlichen Bilanzperioden, die sich aus der jährlichen Anwendung der Mindestzuführung ergibt. Der Optionswert aus dem Simulationsmodell liegt in der Praxis regelmäßig deutlich höher.

Bei Verwendung einer alternativen Formel für den Put ändern sich die Größen $Z\ddot{U}(VN)$, $Z\ddot{U}(VU)$ und DT in der Marktwertbilanz.

Aus den Put-Call-Paritäten der Black-Scholes-Formel und der Austauschoption

$$\text{Garantie} + Z\ddot{U} + \text{Put} = \text{Garantie} + \text{Call},$$

$$B + AO_{B \rightarrow A} = A + AO_{A \rightarrow B}$$

erhält man

$$A = \text{Garantie},$$

$$B = \text{Garantie} + Z\ddot{U},$$

$$\text{Put} = AO_{B \rightarrow A},$$

$$\text{Call} = AO_{A \rightarrow B},$$

wobei die $Z\ddot{U}$ auch negativ sein können. Mit dieser Parametrisierung wird die Austauschoption in QIS 6 gerechnet.

Eine alternative Parametrisierung, gekennzeichnet durch Schlange, erhält man aus den Paritäten und der differenzierten Betrachtung der Gewinnquellen:

$$\text{Garantie} + Z\ddot{U}(\text{KA}) + Z\ddot{U}(\text{VT}) + \text{Put} = \text{Garantie} + \text{Call},$$

$$C + D + \widetilde{AO}_{C \rightarrow A} + \widetilde{AO}_{D \rightarrow 0} = A + 0 + \widetilde{AO}_{A \rightarrow C} + \widetilde{AO}_{0 \rightarrow D}$$

mit

$$A = \text{Garantie},$$

$$C = \text{Garantie} + Z\ddot{U}(\text{KA}),$$

$$D = Z\ddot{U}(\text{VT})$$

und unter der vereinfachenden Annahme, dass D konstant ist:

$$AO_{C \rightarrow A} = \widetilde{AO}_{C \rightarrow A} + \widetilde{AO}_{D \rightarrow 0} = \widetilde{AO}_{C \rightarrow A} + (-D)^+,$$

$$AO_{A \rightarrow C} = \widetilde{AO}_{A \rightarrow C} + \widetilde{AO}_{0 \rightarrow D} = \widetilde{AO}_{A \rightarrow C} + (D)^+.$$

Der Term $(-D)^+$ wird dabei in den inneren Wert von $AO_{C \rightarrow A}$ definiert, siehe Anhang 3. Entsprechendes gilt für $(D)^+$ und $AO_{A \rightarrow C}$.

Je nachdem, ob wir die Gewinnquelle gemeinsam oder separat modellieren, benutzen wir die Bezeichnung $AO_{X \rightarrow A}$ mit $X = B$ oder $X = C$.

Die Volatilität σ_A der Garantie ergibt sich direkt aus der Zinsvolatilität σ_{Zins} und der Passivduration. Die Standardabweichung des Aktivportfolios der Austauschoption entspricht der Standardabweichung $\sigma(\text{KA})$ des Puffer Puts:

$$\sigma_A = D_{VT} \cdot \sigma_{Zins},$$

$$\sigma_X = \sigma(\text{KA})$$

und die Korrelation stammt ausschließlich aus der gemeinsamen Zinssensitivität der Aktiv- und der Passivseite. Nach Fitten der in QIS und LTGA vorgegeben Datentabelle, siehe letzter Faktor, beträgt sie approximativ:

$$\rho_{AO} = (1 - a) \cdot \frac{D_{FI} \cdot \sigma_{Zins}}{D_{FI} \cdot \sigma_{Zins} + \sigma_{Kredit}} \cdot \left(1 - \left(\frac{D_{VT} - D_{FI}}{\max(D_{VT}, D_{FI}) + 5} \right)^2 \right).$$

Anmerkung: In der QIS 6 wird abweichend B definiert als $B = \text{Garantie} + Z\ddot{U}(\text{VN})$ und zur Bestimmung von σ_A wird die modifizierte Duration der *Leistungscashflows* (also Passivcashflows ohne Prämien-cashflows) verwendet anstatt der sachgerechten Passivduration D_{VT} .

Bei Verzicht auf Neugeschäft kann der Limited Liability Put gezogen werden, welcher den Wert der gesamten Option stark, für $x > 0$ bis maximal auf das Eigenkapital, reduziert. Der LLP berechnet sich wie die Austauschoption, bei welcher die Garantie um das Eigenkapital reduziert wird. Der Wert der Austauschoption unter der Möglichkeit, dass Neugeschäft einzustellen beträgt:

$$AO_{X \rightarrow A} = \begin{cases} \overline{AO}_{X \rightarrow A} & \text{wenn NG} = 1 \\ \overline{AO}_{X \rightarrow A} - \overline{AO}_{X \rightarrow (A-EK)} < EK & \text{wenn NG} = 0 \end{cases}$$

mit der Grundgröße der Austauschoption

$$\overline{AO}_{X \rightarrow A} = A \cdot N(o) - X \cdot N(o - \sigma_{\Delta} \cdot \sqrt{rlz}),$$

$$o = \frac{\ln\left(\frac{A}{X}\right) + \frac{1}{2} \cdot rlz \cdot \sigma_{\Delta}^2}{\sigma_{\Delta} \cdot \sqrt{rlz}}.$$

Die Laufzeit der Option entspricht der Restlaufzeit des Bestandes, also gemäß Anhang 2:

$$rlz = \frac{1}{1 - e^{-\kappa_{VT}}},$$

während im QIS und LTGA die mittlere Restlaufzeit des *Leistungscashflows* verwendet wird. Die Austauschoption berücksichtigt keine Bilanzperioden, denn es ist nur der Zustand am Ende der Optionslaufzeit relevant. $N(\cdot)$ ist die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Die Volatilität σ_{Δ} der Differenz der Portfolien A und B beträgt:

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma(KA)^2 - 2 \cdot \rho_{AO} \cdot \sigma_A \cdot \sigma(KA)}.$$

Mit der hohen Korrelation und unter der Annahme, dass die Aktienquote gering ist, gilt ungefähr $\sigma_{\Delta} \approx |\sigma_A - \sigma(KA)| \approx |D_{VT} - D_{FI}| \cdot \sigma_{Zins}$ und man sieht, dass der Zeitwert der Austauschoption von der Durationslücke bzw. der Volatilitätslücke getrieben wird.

Anhang 5: Appraisal Value

In Abschnitt 5 wird im Rahmen des Neugeschäftswerts der Neugeschäftsfaktor κ_{VT} verwendet. Um die Konsistenz zum Wert des Gesamtbestands sicher zu stellen, wird ein Faktor bezogen auf den Bestand als Anteil des Neugeschäfts verwendet. Für solche Größen könnte der gleiche Faktor verwendet werden, wenn der Produktmix gleich bleibt und Ertrag und Risiko über den Vertragsverlauf gleich blieben. Dann wäre der Ertrag proportional zum Risiko und der Neugeschäftsfaktor κ_{VT} betragen. Dieser Faktor ergibt sich bereits intuitiv aus der Tatsache, dass sich der Bestand annahmegemäß im Gleichgewicht befindet, sich bei Neugeschäft also nicht verändert, ohne Neugeschäft jedoch pro Jahr um die Bestandsabriebsrate κ_{VT} reduziert. Folglich macht die Neugeschäftsscheibe eines Jahres genau den Anteil κ_{VT} des aktuellen Bestands aus – vorausgesetzt, Ertrag und Risiko sind im Vertragsverlauf konstant.

Diese Voraussetzung ist jedoch im Allgemeinen gerade nicht erfüllt. Z. B. ist es plausibel, anzunehmen, dass der Ertrag entweder konstant ist, oder tendenziell im Vertragsverlauf steigt, wenn der wichtige Zinsgewinn absolut mit der Deckungsrückstellung steigt und wie nachfolgend erläutert zudem die Risikomarge fällt. Des Weiteren sind die Kapitalkosten zwar proportional zum konstanten handelsrechtlichen Eigenkapital, dieses dient aber der Bedeckung der Kapitalanforderung so dass der Verlauf der Kapitalanforderung entscheidend ist. Diese sinkt – anders als bei Solvency I – im Vertragsverlauf, da das wichtige Zinsrisiko abnimmt. Die DAV Unterarbeitsgruppe Stornoabschlag (2014) arbeitet beispielsweise mit der Annahme, dass die Aktivduration eines Vertrages aufgrund der kollektiven Kapitalanlage konstant ist und der Aktivduration des gesamten Bestandes entspricht. Die Passivduration des Vertrags ist zu Vertragsbeginn in der Regel höher als die Aktivduration, so dass ein Zinssenkungsrisiko vorliegt, während sie gegen Vertragsende gegen null geht und damit sogar das Zinssenkungsrisiko reduziert, die Kapitalanforderung aus dem Zinsrisiko wird also sogar negativ.

Aufgrund dieser unterschiedlichen Verläufe von Ertrag und Risiko repräsentiert der Bestand, welche auch alte Neugeschäftsscheiben kurz vor Ablauf umfasst, im Vergleich zu einer neuen Neugeschäftsscheibe tendenziell überdurchschnittlich viel Ertrag aber nur unterdurchschnittlich viel Risikokapitalkosten. Der Wert des Bestands kann also nicht direkt für das Neugeschäft übernommen werden. Bezogen auf den Bestand ist der Anteil einer Neugeschäftsscheibe am Ertrag wohl eher geringer und ihr Anteil an den Kapitalkosten höher.

Es werden daher Profile a_i über die Vertragslaufzeit i eines noch im Bestand befindlichen Vertrages angenommen. Der Profilverlauf folgt einer geometrischen Entwicklung mit Rate α . Diese Profile werden gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit, dass ein Vertrag noch im Bestand ist. Dabei wird angenommen, dass jeder einzelne Vertrag sich in dem gleichen Maße geometrisch mit Rate κ_{VT} abbaut wie der gesamte Bestand:

$$a_i = e^{(\alpha - \kappa_{VT}) \cdot i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad \text{mit } 0 < \alpha < \kappa_{VT}.$$

Für ein solches Profil ergibt sich der nachfolgende Neugeschäftsfaktor bezogen auf den Bestand. Die darin angesetzte barwertige Neugeschäftsscheibe als Teil des barwertigen Bestands kann wie folgt schematisch über die Vertragslaufzeit i und die künftigen Zeitpunkte $t = 0, 1, 2, \dots, \infty$ dargestellt werden:

0		$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{a}_0$						
1		$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{a}_1$	$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_1$					
2		$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{a}_2$	$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_2$	$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{a}_2$				
3		$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{a}_3$	$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_3$	$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{a}_3$	$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{a}_3$			
...		...	...	...	...	...		
∞		$\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{a}_\infty$	$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{a}_\infty$	$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{a}_\infty$	$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{a}_\infty$	$\mathbf{v}_4 \cdot \mathbf{a}_\infty$...	$\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{a}_\infty$	
i / t		0	1	2	3	4	...	∞

Der Neugeschäftsfaktor entspricht dem Verhältnis der fett markiert künftigen Neugeschäftsscheibe im Verhältnis zur Summe des gesamten künftigen Bestands:

$$\begin{aligned}
 \text{Neugeschäftsfaktor} &= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} (v_t \cdot a_t)}{\sum_{t=0}^{\infty} (v_t \cdot \sum_{i=t}^{\infty} a_i)} \\
 &= \frac{\sum_{t=0}^{\infty} e^{(\alpha - \kappa_{VT} - \ln(1+r)) \cdot t}}{\sum_{t=0}^{\infty} (-e^{-\ln(1+r) \cdot t} \cdot \sum_{i=t}^{\infty} e^{(\alpha - \kappa_{VT}) \cdot i})} \\
 &= \frac{\frac{e^{\kappa_{VT} \cdot (1+r)}}{e^{\kappa_{VT} \cdot (1+r)} - e^{\alpha}}}{\frac{\sum_{t=0}^{\infty} (e^{(\alpha - \kappa_{VT} - \ln(1+r)) \cdot t + \kappa_{VT}})}{e^{\alpha} - e^{\kappa_{VT}}}} \\
 &= \frac{\frac{e^{\kappa_{VT} \cdot (1+r)}}{e^{\kappa_{VT} \cdot (1+r)} - e^{\alpha}}}{\frac{1}{e^{\alpha} - e^{\kappa_{VT}}} \cdot \frac{e^{2 \cdot \kappa_{VT} \cdot (1+r)}}{e^{\kappa_{VT} \cdot (1+r)} - e^{\alpha}}} \\
 &= \frac{e^{\kappa_{VT}} - e^{\alpha}}{e^{\kappa_{VT}}}.
 \end{aligned}$$

Der Neugeschäftsfaktor liegt zwischen null und eins. Es bestehen folgende Spezialfälle:

$$\text{Neugeschäftsfaktor} = \begin{cases} \frac{e^{\kappa_{VT}}}{e^{\kappa_{VT}}} = 1 & \text{für } \alpha = -\infty \\ \frac{e^{\kappa_{VT}} - e^{-\kappa_{VT}}}{e^{\kappa_{VT}}} \approx 2 \cdot \kappa_{VT} & \text{für } \alpha = -\kappa_{VT} \\ \frac{e^{\kappa_{VT}} - \frac{1}{1+r}}{e^{\kappa_{VT}}} \approx 1 - e^{-\kappa_{VT}} + e^{-\kappa_{VT}} \cdot r \approx \frac{1}{D_{VT}} & \text{für } \alpha = -\ln(1+r) \\ \frac{e^{\kappa_{VT}} - 1}{e^{\kappa_{VT}}} \approx \kappa_{VT} & \text{für } \alpha = 0 \\ \frac{e^{\kappa_{VT}} - 1 - r}{e^{\kappa_{VT}}} \approx \kappa_{VT} - r & \text{für } \alpha = \ln(1+r) < \kappa_{VT} \\ 0 & \text{für } \alpha \text{ gegen } \kappa_{VT}. \end{cases}$$

In Abschnitt 5 wird im Rahmen der Bestimmung des Neugeschäftswerts für den Ertrag vereinfachend das konstante Profil $\alpha = 0$ als Ansatz gewählt, womit sich als Spezialfall approximativ der Neugeschäftsfaktor κ_{VT} ergibt. Für das den Kapitalkosten zugrundeliegende Risiko ist hingegen eher das fallende Profil $\alpha = -\ln(1+r)$ angemessen, um den Neugeschäftswert nicht zu überschätzen. Je höher der Zins, desto stärker ist das Zinssenkungsrisiko und entsprechend steiler das Profil. Es ergibt sich der Spezialfall des Neugeschäftsfaktors von approximativ $1/D_{VT}$. Je steiler das Profil, desto größer sind die resultierenden Neugeschäftsfaktoren. Da wir beide Faktoren zur Vereinfachung approximiert haben, gilt diese Beziehung bei kleinem κ_{VT} . Eine künftige genauere Analyse der Ertrags- und Risikoprofile zur Verifizierung dieser Ansätze wäre hilfreich.

Anhang 6: Leakage Test

Durch die Bilanzgleichung der ökonomischen Marktwertbilanz ist die innere Konsistenz des Modells, also die Widerspruchsfreiheit, sichergestellt. Die korrekte Umsetzung des Modells in Excel kann numerisch mit Hilfe eines sogenannten Leakage-Tests geprüft werden.

Hierfür bietet sich insbesondere die diversifizierte Kapitalanforderung an. Der Ist-Wert entspricht der um die Adjustments bereinigten Kapitalanforderung. Zusätzlich muss er im Fall einer theoretisch möglichen negativen Zins-Kapitalanforderung noch bereinigt werden. Die Ist-Brutto-Kapitalanforderung entspricht im Wesentlichen der ZÜ-Änderung und beträgt:

$$\begin{aligned} \text{SCR}_{\text{Brutto}} &= \text{SCR} - \Delta \text{ZÜ}(\text{VN}) - \Delta \text{RM} - \Delta \text{DT} - \left(\overline{\text{SCR}_{\text{Zins}}^{\text{vor max}}} \right)^- \\ &= -(\Delta \text{ZÜ} + \Delta \text{EK} + \Delta \text{rfBEM}) - \left(\overline{\text{SCR}_{\text{Zins}}^{\text{vor max}}} \right)^- \end{aligned}$$

und die Soll-Kapitalanforderung beträgt:

$$\text{SCR}_{\text{Brutto}} = \text{SCR}_{\text{Zins}} + \text{SCR}_{\text{Kredit}} + \text{SCR}_{\text{AI}} + \text{SCR}_{\text{VT}} + \text{SCR}_{\text{Op}} = \text{SCR}_{\text{Brutto}}.$$

Die Differenz wird als Leakage bezeichnet und soll stets null sein.

Literatur

Albrecht, P. (2006) „Kreditrisiken – Modellierung und Management: Ein Überblick“, Universität Mannheim.

Baseler Ausschuss für Bankenaufsicht (2004) „Internationale Konvergenz der Kapitalmessung und Eigenkapitalanforderungen“, Übersetzung der Deutschen Bundesbank, Juni 2004.

Basel Committee on Banking Supervision (2004) „Modifications to the capital treatment for expected and unexpected credit losses in the New Basel Accord“, 30 January 2004. <http://www.bis.org/publ/bcbs104.pdf>

Basel Committee on Banking Supervision (2005) „An Explanatory Note on the Basel II IRB Risk Weight Functions“, July 2005. <http://www.bis.org/bcbs/irbriskweight.pdf>

Black, F., Scholes, M. (1973) „The Pricing of Options and Corporate Liabilities“, Journal of Political Economy 81: 637-654.

Briys, E., de Varenne, F. (1997) „On the Risk of Life Insurance Liabilities: Debunking Some Common Pitfalls“, The Journal of Risk and Insurance, 1997, Vol. 64, No. 4, 673-694.

Briys, E., de Varenne, F. (2001) „Insurance from Underwriting to Derivatives – Asset Liability Management in Insurance Companies“, Wiley Finance, ISBN 978-0-471-49227-6.

Butsic, R. P. (1994) „Solvency Measurement for Property-Liability Risk-Based Capital Applications“, The Journal of Risk and Insurance, 1994, Vol. 61, No. 4, 656-690.

CRO Forum (2008) „Market Value of Liabilities for Insurance Firms“, July 2008.

Cox, J. C., Ingersoll, J. E., Ross, S. A. (1985) „A Theory of the Term Structure of Interest Rates“, Econometrica, Vol. 53, No. 2 (Mar., 1985), pp. 385-407.

DAV AG Bewertung von Garantien (2012a) „Einschätzung der Anlagerisiken im Erläuterungsbericht des Verantwortlichen Aktuars“, überarbeiteter Hinweis, 02.07.2012.

DAV AG Bewertung von Garantien (2012b) „Risikobewertung langfristiger Garantien“, überarbeiteter Hinweis, 02.07.2012.

DAV AG Market Consistent Embedded Value (2011) Deutsche Aktuarvereinigung Fachgrundsatz „Market Consistent Embedded Value“ der DAV-Arbeitsgruppe Market Consistent Embedded Value, Hinweis, 16. Juni 2011.

DAV AG Optionsbewertung (2007) Deutsche Aktuarvereinigung Fachgrundsatz „Ergebnisbericht der DAV-Arbeitsgruppe ‚Optionsbewertung‘“, Hinweis, 13.09.2007.

DAV UAG Stornoabschlag (2014) „Herleitung des Stornoabschlags“ Hinweis in Arbeit.

DeckRV (2014) “Verordnung über Rechnungsgrundlagen für die Deckungsrückstellungen“ Deckungsrückstellungsverordnung vom 6. Mai 1996 (BGBl. I S. 670), die durch Artikel 4 des Gesetzes vom 1. August 2014 (BGBl. I S. 1330) geändert worden ist.

Delbaen, F. (1993) “Consols in the CIR model”, *Mathematical Finance*, 3(2), 125-134.

Drezner, Z., Wesolowsky, G. (1989) “On the Computation of the Bivariate Normal Integral”, *Journal of Statist. Comput. Simul.* 35, 101–107.

Eisenberg, J., Schmidli, H. (2009) “Optimal Control of Capital Injections by Reinsurance in a Diffusion Approximation”, *Blätter DGVFM* 30: 1-13.

GDV (2002) Ergebnisbericht der GDV-Arbeitsgruppe “Zukünftiger Rechnungszins“, GDV-Rundschreiben 1805/2002.

GDV (2005) “Diskussionsbeitrag für einen Solvency II kompatiblen Standardansatz (Säule I)”, Dezember 2005.

GDV (2012a) “QIS6 GDV/PKV Eine Zusammenfassung des vorläufigen Standes quantitativer Solvency II-Anforderungen an Einzelunternehmen zu Testzwecken“, Stand 29.02.2012, Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e. V. (GDV).

GDV (2012b) “Handbuch Cashflow-Modell (QIS6-Ansatz)“, Stand 05.03.2012, Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e. V. (GDV).

GDV (2013) “Handbuch Cashflow-Modell (LTGA -Ansatz) Stand: 08.02.2013“, Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e. V. (GDV).

GDV (2014) “Simulationsmodell“.

Geman, H. and Yor, M. (1993) “Bessel Processes, Asian Options, and Perpetuities”, *Mathematical Finance*, 3(4), 349–375.

Goovaerts, M. J., Dhaene, J. (1999) “Supermodular Ordering and Stochastic Annuities”, *Insurance: Mathematics and Economics*, 24(3), 281-290.

Hallerbach, W. G. (2001) “Duration and Bond Return Approximation: The Quasi-Convexity Effect“, *Erasmus Center for Financial Research, Report 2001/1*, October 2001.

Heinen, N. (2011) “Bewertung von Lebensversicherungsverpflichtungen im Solvency II Standardmodell“, Stand 19.12.2011, Köln.

Hull, J. C. and White, A. (1990) “Pricing interest-rate derivative securities”, *The Review of Financial Studies*, Vol. 3, No. 4 (1990) pp. 573–592.

IFRS (2013) “Exposure Draft ED/2013/7 Insurance Contracts“, A Revision of ED/2010/8 Insurance Contracts, June 2013, ISBN: 978-1-907877-96-4.

- Jurin, B., Margrabe, W. (2005) "The JPMorgan Framework for Measuring – and Managing the Risk of – Overfunding and Underfunding in a Defined Benefit Pension Plan", JP Morgan.
- Margrabe, W. (1978) "The Value of an Option to Exchange One Asset for Another", *Journal of Finance* 33: 177-186.
- Merton, R. C. (1977) "An Analytic Derivation of the Cost of Deposit Insurance and Loan Guarantees", *Journal of Banking and Finance*, 1: 3.
- MindZV (2014) "Verordnung über die Mindestbeitragsrückerstattung in der Lebensversicherung (Mindestzuführungsverordnung)", vom 4. April 2008, BGBl. I S. 690, die durch Artikel 6 des Gesetzes vom 1. August 2014 (BGBl. I S. 1330) geändert worden ist.
- Norberg, R. (2004) "Vasicek Beyond the Normal", *Mathematical Finance*, 14(4), 125-134.
- Paulusch, J. (2012) "The Volatility of Interest Rates and Forward Rates in the Hull White Model", Working Paper, R+V Lebensversicherung AG, <http://ssrn.com/abstract=2159308>.
- Shreve, S. E., Lehoczky, J. P., Gaver, D. P. (1984) "Optimal consumption for general diffusions with absorbing and reflecting barriers", *SIAM J Control Optim* 22: 55-75.
- Society of Actuaries (2012) "Report On Pricing Using Market Consistent Embedded Value (MCEV)", June 2012, Society of Actuaries research project on pricing using market-consistent embedded value, Novian Junus, David Wang and Zohair Motiwalla.
- Solvency II Rahmenrichtlinie (2009) "Richtlinie 2009/138/EG des Europäischen Parlaments und des Rates vom 25. November 2009 betreffend die Aufnahme und Ausübung der Versicherungs- und der Rückversicherungstätigkeit (Solvabilität II)".
- VAG (2011) "Gesetz über die Beaufsichtigung der Versicherungsunternehmen", Versicherungsaufsichtsgesetz in der Fassung der Bekanntmachung vom 17. Dezember 1992 (BGBl. 1993 I S. 2), zuletzt durch Artikel 2 Absatz 78 des Gesetzes vom 22. Dezember 2011 (BGBl. I S. 3044).
- Van den End (2011), J. W. „Statistical Evidence on the Mean Reversion of Interest Rates“, DNB Working Paper No. 284, March 2011.
- Vasicek, O. A. (1977) "An Equilibrium Characterisation of the Term Structure", *Journal of Financial Economics* 5 (2): 177–188.
- Vasicek, O. A. (2002) "The Distribution of Loan Portfolio Value", *Risk*, Dezember 2002.
- West, G. (2005) "Better Approximations to Cumulative Normal Functions", *Wilmott Magazine*, S. 70-76, Mai 2005.